

TECHNISCHE UNIVERSITÄT HAMBURG - HARBURG

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Institut für Theoretische Elektrotechnik

Prof. Dr. sc. techn. Christian Schuster



Klausursammlung

Theoretische Elektrotechnik II

- 2012 bis 2016 -

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Dr. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	9	6	9	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 9. 3. 2012 – 11:30 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

Hinweise: **1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen. **Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!**

2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“: Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.

Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.

Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

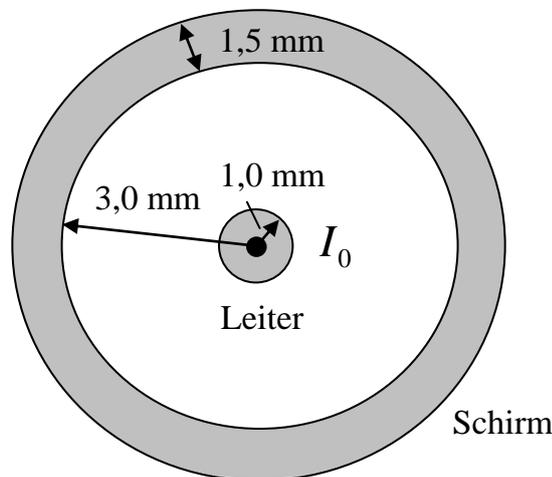
Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in differentieller Form für den Fall quasistationärer Felder?
- b) Unter welcher Voraussetzung (Formel) gelten diese?
- c) Wie lautet die Formel für die Wellenzahl einer elektromagnetischen Welle der Kreisfrequenz ω im Vakuum?
- d) Eine ebene elektromagnetische Welle hat eine Amplitude der magnetischen Feldstärke von 10 A/m. Wie groß ist die zugehörige elektrische Feldstärkeamplitude (+/- 5%)?
- e) Was ist richtig: Die innere Induktivität eines von Gleichstrom durchflossenen runden Leiters ist (I) null, (II) größer null und abhängig vom Radius, (III) größer null und unabhängig vom Radius oder (IV) nicht definiert?
- f) Wie lautet die Formel für die so genannte Oberflächenimpedanz (gültig bei starkem Skinneffekt)?

Vor- und Zuname:	Matrikel-Nr.:
------------------	---------------

2. Aufgabe

Ein gerader, unendlich langer, von Wechselstrom mit der Frequenz $f = 10$ MHz, Nullphasenwinkel 0 Grad und Amplitude I_0 durchflossener Leiter mit Radius 1 mm ist konzentrisch umgeben von einem ebenfalls unendlich langen Schirm mit Innenradius $R = 3$ mm und Dicke $t = 1,5$ mm. Der Schirm besitzt eine Leitfähigkeit von $\kappa = 1,82 \cdot 10^6$ S/m sowie eine relative Permeabilität von $\mu_r = 50000$. Der Raum zwischen Leiter und Schirm ist Luft ($\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$).



Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

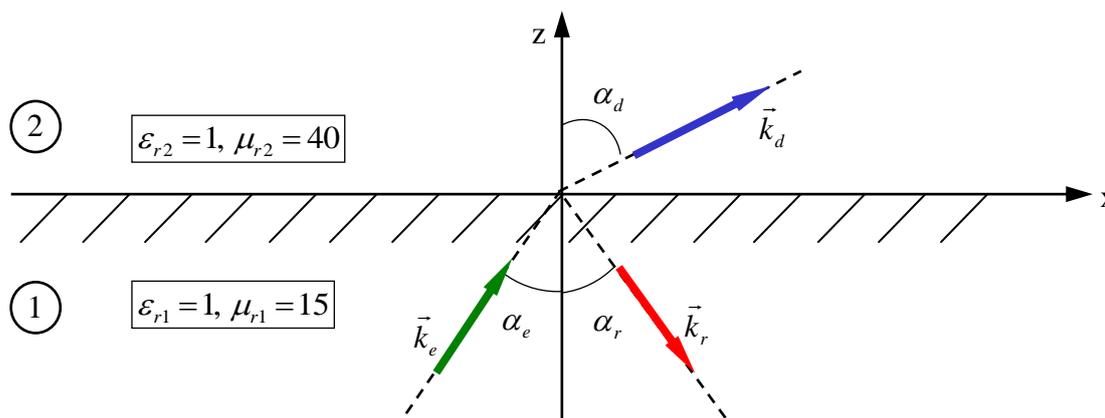
- Bestimmen Sie den Betrag des Magnetfeldes an der Innenseite des Schirmes, das durch I_0 hervorgerufen wird! Vernachlässigen Sie dabei Retardierungseffekte!
- Begründen Sie, ob schwacher oder starker Skineneffekt vorliegt und verwenden Sie die geeignete Näherung für die folgenden Aufgaben!
- Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke innerhalb des Schirmes als Funktion des Abstandes r vom Leitermittelpunkt! In welche Richtung ist diese orientiert?
- Bestimmen Sie die induzierte Stromdichte innerhalb des Schirmes als Funktion des Abstandes r vom Leitermittelpunkt! In welche Richtung ist diese orientiert?
- Wie groß ist der gesamte induzierte Strom innerhalb des Schirmes?
- Wie groß ist die gesamte Verlustleistung innerhalb des Schirmes pro Länge?

Hinweis:

Zahlenwerte bitte bis auf 4 Stellen berechnen (also z. B. $1,234$ oder $1,234 \cdot 10^5$), wobei die letzte Stelle (hier die 4) gerundet sein soll.

3. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle läuft in einem verlustlosen Medium 1 mit der Frequenz $f = 5 \text{ GHz}$ unter dem Einfallswinkel $\alpha_e = 37^\circ$ auf eine ebene Grenzfläche zu einem verlustlosen Medium 2 und wird reflektiert bzw. transmittiert. Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle befindet sich in der xz -Ebene. Die mittlere Leistungsflussdichte (Betrag des Poynting-Vektors) der Welle beträgt $2,5 \text{ W/m}^2$.



Die einfallende Welle besitzt folgendes elektrisches Feld:

$$\vec{E}_e = \hat{E}_e \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_y$$

Berechnen Sie in Zahlenwerten:

- die Beträge der komplexen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes der einfallenden Welle,
- die Beträge der komplexen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes der reflektierten Welle,
- die Beträge der komplexen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes der transmittierten Welle,
- einen Wert für μ_{r2} (mit $\mu_{r2} \neq \mu_{r1}$) so, dass die einfallende Welle nicht reflektiert wird!

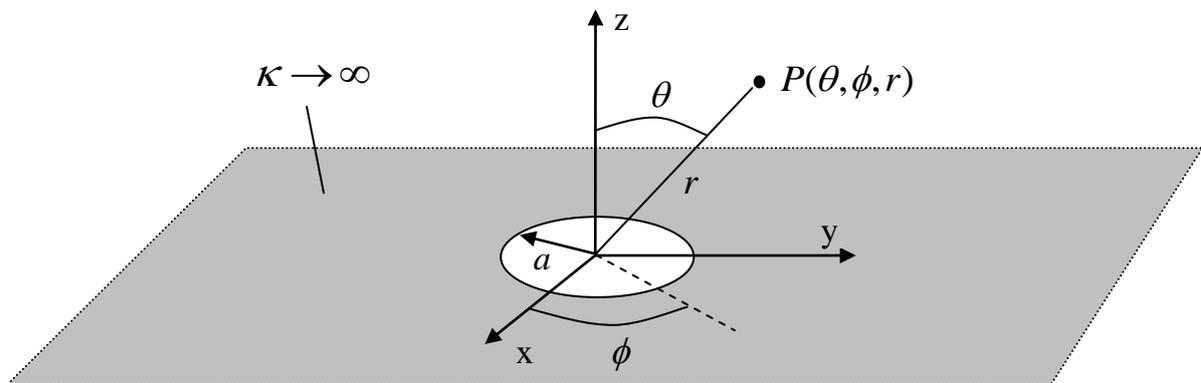
Hinweis:

Zahlenwerte bitte bis auf 4 Stellen berechnen (also z. B. 1,234 oder $1,234 \cdot 10^5$), wobei die letzte Stelle (hier die 4) gerundet sein soll.

4. Aufgabe

In einer unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Oberfläche befindet sich eine kleine, kreisrunde Öffnung (Apertur) mit Radius a . Durch ein wechselndes elektromagnetisches Feld in der Apertur wird im oberen Halbraum ein Strahlungsfeld erzeugt, das im Fernfeld an einem Punkt P folgende elektrische Feldstärkekomponenten aufweist ($k = \text{Wellenzahl}$):

$$\hat{E}_\theta = j \cdot \frac{ka^2 E_0}{2r} \cdot e^{-jkr} \cdot \sin \phi, \quad \hat{E}_\phi = j \cdot \frac{ka^2 E_0}{2r} \cdot e^{-jkr} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$



Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben unter der Annahme, dass der obere Halbraum Vakuum ist:

- Wie lauten die zugehörigen magnetischen Feldstärkekomponenten im Fernfeld?
- Welche Polarisierung(en) liegen vor (linear, zirkular, elliptisch)? Bei mehreren Polarisierungen: Wie hängen diese von der Strahlungsrichtung ab?
- Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor als Funktion von (θ, ϕ) für den oberen Halbraum!
- Für welche Richtungen (θ, ϕ) im oberen Halbraum wird die abgestrahlte Leistungsdichte (Betrag des Poynting-Vektors) maximal? Welchen Wert besitzt sie in diesen Richtungen?
- Berechnen Sie die gesamte, im Mittel in den oberen Halbraum abgestrahlte Leistung!

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichungen in differentieller Form für quasistationäre Felder:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Anmerkung: In Leitern wird daraus oft noch $\rho = 0$ gefolgert.

- b) Voraussetzungen für Gültigkeit:

$$|\vec{J}| \gg \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \quad \text{bzw. für harmonische Felder } \omega < \kappa / \varepsilon = 1 / \text{Relaxationszeit}$$

- c) Wellenzahl im Vakuum: $k = \frac{\omega}{c_0} = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

- d) Elektrische Feldstärke: $E = \Gamma_0 \cdot H \approx 376,7 \Omega \cdot 10 \text{ A/m} = 3767 \text{ V/m}$

- e) Die innere Induktivität eines von Gleichstrom durchflossenen runden Leiters ist (III) größer null und unabhängig vom Radius.

- f) Oberflächenimpedanz: $\underline{Z}_s = \frac{1+j}{\kappa d} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}$

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Das Magnetfeld an der Innenseite des Schirmes wird am einfachsten über das Ampèresche Gesetz bestimmt (es zeigt ausschließlich in azimuthale Richtung):

$$\underline{\underline{H_\psi(r=R) = \frac{I_0}{2\pi R}}}$$

- b) Skintiefe mit den vorgegebenen Daten:

$$\underline{\underline{d = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}} = 5,276 \cdot 10^{-7} \text{ m}}}$$

Vergleich zur Schirmdicke und Schirminnenradius zeigt, dass d sehr viel kleiner als beide ist. Somit liegt ein Fall von starkem Skineffekt vor.

- c) Aufgrund des starken Skineffekts, kann das Magnetfeld innerhalb des Schirmes mit Hilfe der Halbraumdarstellung approximiert werden. Mit $s = r-R$ als Abstand von der Innenseite des Schirmes in positive radiale Richtung kann man ansetzen (siehe z.B. Übungsaufgaben):

$$\underline{\underline{\hat{H} = \underline{H}_0 \cdot e^{-\frac{1+j}{d}s} \cdot \vec{e}_\psi = \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-\frac{1+j}{d}(r-R)} \cdot \vec{e}_\psi \quad (R \leq r \leq R+t)}}$$

\underline{H}_0 , die Feldstärke auf der Oberfläche, und die azimuthale Orientierung wurden dabei aus Teilaufgabe a entnommen.

- d) Der induzierte Strom wird i.A. berechnet über $\hat{J} = \text{rot} \hat{H}$. In Zylinderkoordinaten ergibt sich dadurch nur eine z-Komponente für den Strom:

$$\hat{J}_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \underline{\hat{H}}_\psi)}{\partial r} = \frac{\hat{H}_\psi}{r} + \frac{\partial \hat{H}_\psi}{\partial r} \approx \frac{\partial \hat{H}_\psi}{\partial r}$$

Die Abschätzung ist gerechtfertigt, denn z.B. an der Stelle $r = R$ gilt:

$$\left| \frac{\hat{H}_\psi}{r} \right| = \left| \frac{H_0}{R} \right| \ll \left| \frac{\partial \hat{H}_\psi}{\partial r} \right| = \sqrt{2} \cdot \left| \frac{H_0}{d} \right|$$

Es folgt somit:

$$\underline{\hat{J}} = -\frac{(1+j) \cdot I_0}{d \cdot 2\pi R} \cdot e^{-\frac{1+j}{d} \cdot s} \cdot \underline{\vec{e}}_z = -\frac{(1+j) \cdot I_0}{d \cdot 2\pi R} \cdot e^{-\frac{1+j}{d} \cdot (r-R)} \cdot \underline{\vec{e}}_z \quad (R \leq r \leq R+t)$$

- e) Die gesamte induzierte Stromdichte erhält man aus der Integration über die durchflossene Fläche. Hierbei setzt man sinnvollerweise die Näherung für einen Halbraum an und findet (Strom = äquivalenter Oberflächenstrom * Umfang):

$$\underline{I}_{\text{ind}} = \iint \underline{\hat{J}} d\vec{A} \approx \underline{\hat{J}}_z(r=R) \cdot \frac{d}{1+j} \cdot 2\pi R = -I_0$$

D.h. der induzierte Strom ist entgegengesetzt gleich groß wie der Leiterstrom!

- f) Die Verlustleistung pro Länge kann z.B. über den komplexen Poynting-Vektor und Multiplikation mit dem Umfang berechnet werden:

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{\hat{E}} \times \underline{\hat{H}}^* \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{\hat{J}}}{\kappa} \times \underline{\hat{H}}^* \right) = \frac{(1+j) \cdot I_0^2}{8d\kappa\pi^2 R^2} \cdot \underline{\vec{e}}_r$$

Daraus:

$$\frac{P}{\ell} = 2\pi R \cdot \text{Re}\{\underline{\vec{S}}\} = \frac{I_0^2}{4d\kappa\pi R}$$

Alternativ kann man über die Oberflächenimpedanz $\underline{Z}_s = \frac{1+j}{\kappa d}$ gehen:

$$\frac{P}{\ell} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\underline{Z}_s\} \cdot \frac{I_0^2}{\text{Umfang}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\kappa d} \cdot \frac{I_0^2}{2\pi R} = \frac{I_0^2}{4d\kappa\pi R}$$

Lösung zur 3. Aufgabe

- a) Die Beträge der komplexen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes können über den Betrag des komplexen Poynting-Vektors berechnet werden:

$$S_e = |\vec{S}_e| = \frac{1}{2} \cdot |\hat{\underline{E}}_e \times \hat{\underline{H}}_e^*| = \frac{1}{2} \cdot |\underline{\Gamma}_1 \cdot \hat{\underline{H}}_e \cdot \hat{\underline{H}}_e^*| = \frac{1}{2} \cdot |\underline{\Gamma}_1| \cdot |\hat{\underline{H}}_e|^2$$

Der Feldwellenwiderstand im Medium 1 ist $\underline{\Gamma}_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1} = \sqrt{\mu_{r1}} \cdot \Gamma_0 = 1459 \Omega$.
(Feldwellenwiderstand $\Gamma_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 376,7 \Omega$). Damit folgen:

$$|\hat{\underline{H}}_e| = \sqrt{\frac{2S_e}{|\underline{\Gamma}_1|}} = \underline{\underline{58,54 \frac{\text{mA}}{\text{m}}}} \quad |\hat{\underline{E}}_e| = |\underline{\Gamma}_1| \cdot |\hat{\underline{H}}_e| = \underline{\underline{85,41 \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

- b) Zur Berechnung des reflektierten und (später) der transmittierten Feldstärken wird von den passenden Fresnelschen Formeln ausgegangen (siehe z.B. Skript, Polarisationsfall 1):

$$\underline{r}_E = \frac{\underline{\Gamma}_2 \cdot \cos \alpha_e - \underline{\Gamma}_1 \cdot \cos \alpha_d}{\underline{\Gamma}_2 \cdot \cos \alpha_e + \underline{\Gamma}_1 \cdot \cos \alpha_d} \quad \text{und} \quad \underline{t}_E = 1 + \underline{r}_E$$

Diese Faktoren gelten für die elektrische Feldstärken. Der Feldwellenwiderstand im Mediums 2 ist $\underline{\Gamma}_2 = \sqrt{\mu_{r2}} \cdot \Gamma_0 = 2383 \Omega$. Der noch unbekannte Durchtrittswinkel α_d lässt sich über das Brechungsgesetz bestimmen:

$$\sin \alpha_d = \frac{k_1}{k_2} \cdot \sin \alpha_e = \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}} \cdot \sin \alpha_e \quad \alpha_d = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}} \cdot \sin \alpha_e \right) = 21,63^\circ$$

Damit ergeben sich für den Reflexionsfaktor und den Transmissionfaktor:

$$\underline{r}_E = 0,168 \quad \text{und} \quad \underline{t}_E = 1,168$$

Damit für die Beträge der komplexen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes der reflektierten Welle:

$$\left| \hat{\underline{E}}_r \right| = r_E \cdot \left| \hat{\underline{E}}_e \right| = 0,168 \cdot 85,41 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{14,35 \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

$$\left| \hat{\underline{H}}_r \right| = \frac{\left| \hat{\underline{E}}_r \right|}{\left| \underline{\Gamma}_1 \right|} = \frac{14,35 \text{ A}}{1459 \text{ m}} = \underline{\underline{9,836 \frac{\text{mA}}{\text{m}}}}$$

- c) ... und damit für die Beträge der komplexen Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes der transmittierten Welle:

$$\left| \hat{\underline{E}}_d \right| = t_E \cdot \left| \hat{\underline{E}}_e \right| = 1,168 \cdot 85,41 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{99,76 \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

$$\left| \hat{\underline{H}}_d \right| = \frac{\left| \hat{\underline{E}}_d \right|}{\left| \underline{\Gamma}_2 \right|} = \frac{99,76 \text{ A}}{2383 \text{ m}} = \underline{\underline{41,86 \frac{\text{mA}}{\text{m}}}}$$

- d) Bei vollständiger Transmission ist der Reflexionsfaktor null. Damit aus den Fresnelschen Formeln:

$$\frac{\underline{\Gamma}_2}{\underline{\Gamma}_1} = \frac{\cos \alpha_d}{\cos \alpha_e} \quad (*)$$

Brechungsgesetz:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sin \alpha_d}{\sin \alpha_e} \quad (**)$$

Formel (*) wird wie folgt umgestellt:

$$\left(\frac{\underline{\Gamma}_2}{\underline{\Gamma}_1} \right)^2 = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} = \frac{\cos^2 \alpha_d}{\cos^2 \alpha_e} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha_d = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \cdot \cos^2 \alpha_e \quad (***)$$

Formel (**) wird wie folgt umgestellt:

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} = \frac{\sin^2 \alpha_d}{\sin^2 \alpha_e} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha_d = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \cdot \sin^2 \alpha_e \quad (****)$$

Addition von (***) und (****):

$$1 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \cdot \sin^2 \alpha_e + \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \cdot \cos^2 \alpha_e$$

Dies führt auf eine quadratische Gleichung für μ_{r2} :

$$\mu_{r2}^2 - \mu_{r2} \cdot \frac{\mu_{r1}}{\cos^2 \alpha_e} + \frac{\mu_{r1}^2 \sin^2 \alpha_e}{\cos^2 \alpha_e} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{r2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_{r1}}{\cos^2 \alpha_e} \pm \sqrt{\frac{\mu_{r1}^2}{4 \cos^4 \alpha_e} - \frac{\mu_{r1}^2 \sin^2 \alpha_e}{\cos^2 \alpha_e}} = 11,76 \pm 3,241$$

$$\Rightarrow \mu_{r2} = 15,00 \text{ oder } 8,519$$

Da in diesem Falle gefordert ist, dass $\mu_{r2} \neq \mu_{r1} = 15$, ist das Ergebnis:

$$\underline{\underline{\mu_{r2} = 8,519}}$$

Anmerkung:

Der Einfall erfolgt in diesem Fall unter dem so genannten Brewster-Winkel.

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Die magnetischen Feldstärkekomponenten im Fernfeld bestimmen sich über den Feldwellenwiderstand $\Gamma_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 376,7 \Omega$ des Freiraumes zu:

$$\underline{\underline{\hat{H}_\theta}} = -\frac{\hat{E}_\phi}{\Gamma_0} = -j \cdot \frac{ka^2 E_0}{2r \cdot \Gamma_0} \cdot e^{-jkr} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$

und

$$\underline{\underline{\hat{H}_\phi}} = \frac{\hat{E}_\theta}{\Gamma_0} = j \cdot \frac{ka^2 E_0}{2r \cdot \Gamma_0} \cdot e^{-jkr} \cdot \sin \phi$$

Hierbei wird ausgenutzt, dass elektrische und magnetische Felder im Fernfeld senkrecht zueinander stehen und deren Kreuzprodukt in radiale Richtung zeigt.

- b) Die Komponenten des elektrischen Feldes besitzen für beliebige Winkel θ und ϕ stets den gleichen Phasenwinkel zueinander, nämlich null Grad. Daher ist das elektrische Feld bzw. die Welle

in jede Richtung linear polarisiert.

- c) Der komplexe Poynting-Vektor kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{S}}} &= \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\hat{E}}} \times \underline{\underline{\hat{H}}}^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{E}_\theta \\ \hat{E}_\phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{H}_\theta^* \\ \hat{H}_\phi^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\hat{E}_\theta \cdot \hat{H}_\phi^* - \hat{E}_\phi \cdot \hat{H}_\theta^* \right) \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{2\Gamma_0} \cdot \left(\hat{E}_\theta \cdot \hat{E}_\theta^* + \hat{E}_\phi \cdot \hat{E}_\phi^* \right) \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{2\Gamma_0} \cdot \left(|\hat{E}_\theta|^2 + |\hat{E}_\phi|^2 \right) \cdot \vec{e}_r \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2\Gamma_0} \cdot \frac{k^2 a^4 E_0^2}{4r^2} \cdot (\sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \phi) \cdot \vec{e}_r}}} \end{aligned}$$

Wie zu sehen, hat der komplexe Poynting-Vektor keinen Imaginärteil. Sein Betrag ist:

$$S(r, \theta, \phi) = \frac{k^2 a^4 E_0^2}{8r^2 \cdot \Gamma_0} \cdot (\sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \phi) \quad (*)$$

- d) Aus der Formel (*) aus Teilaufgabe c kann man den maximalen Wert des Poynting-Vektors direkt ablesen:

$$\underline{\underline{\max[S(\theta, \phi)] = \frac{k^2 a^4 E_0^2}{8r^2 \cdot \Gamma_0}}} \quad (**)$$

Dies folgt aus der Identität $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ und der Tatsache, dass $\cos^2 \theta \leq 1$. Die Bestimmung der Richtungen, in die diese maximale Leistungsdichte abgestrahlt wird erfolgt entweder aus der Anschauung oder ausführlicher Kurvendiskussion wie hier:

Ableitung nach θ :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\frac{k^2 a^4 E_0^2}{4r^2 \cdot \Gamma_0} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos^2 \phi$$

Nullsetzen ergibt Werte für mögliche Extrema (ϕ beliebig): $\theta_{\text{ext}} = 0, \frac{\pi}{2}$.

Einsetzen in (*) und Vergleich mit (**) zeigt, dass nur 0 richtig ist. Somit:

$$\underline{\underline{\text{Maximum für } \theta = 0, \phi \text{ beliebig}}} \quad (***)$$

Ableitung nach ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \phi} &= \frac{k^2 a^4 E_0^2}{8r^2 \cdot \Gamma_0} \cdot (2 \cos \phi \cdot \sin \phi - 2 \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot \cos^2 \theta) \\ &= \frac{k^2 a^4 E_0^2}{4r^2 \cdot \Gamma_0} \cdot (1 - \cos^2 \theta) \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi \end{aligned}$$

Nullsetzen ergibt Werte für mögliche Extrema (θ beliebig): $\phi_{\text{ext}} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

Einsetzen in (*) und Vergleich mit (**) zeigt folgende Lösungen:

$$\underline{\underline{\text{Maximum für } \theta = 0, \phi = 0}}$$

$$\underline{\underline{\text{Maximum für } \theta = \text{beliebig}, \phi = \pi/2}}$$

$$\underline{\underline{\text{Maximum für } \theta = 0, \phi = \pi}}$$

$$\underline{\underline{\text{Maximum für } \theta = \text{beliebig}, \phi = 3\pi/2}}$$

$$\underline{\underline{\text{Maximum für } \theta = 0, \phi = 2\pi}}$$

Die Lösungen für $\theta = 0$ sind in (***) schon enthalten.

- e) Zur Bestimmung der im Mittel abgestrahlten Leistung wird die radiale Komponente des Poynting-Vektors über den oberen Halbraum integriert:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{rad}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} S_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= \frac{k^2 a^4 E_0^2}{8 \cdot \Gamma_0} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \phi \cdot \sin \theta + \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \phi \cdot \sin \theta) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{rad}} &= \frac{k^2 a^4 E_0^2}{8 \cdot \Gamma_0} \cdot \left(\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta + \pi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta \right) \\
 &= \frac{k^2 a^4 E_0^2 \pi}{8 \cdot \Gamma_0} \cdot \left(\left[-\cos \theta \right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \right) \\
 &= \frac{k^2 a^4 E_0^2 \pi}{8 \cdot \Gamma_0} \cdot \left(\left[-0 + 1 \right] + \left[-0 + \frac{1}{3} \right] \right) \\
 &= \frac{k^2 a^4 E_0^2 \pi}{6 \cdot \Gamma_0}
 \end{aligned}$$

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Dr. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	4	10	10	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 20. 8. 2012 – 13:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

Hinweise: **1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen. **Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!**

2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“: Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.

Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.

Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen in integraler Form?
- b) Wie ist die Skintiefe (Eindringtiefe) in elektrisch leitenden Medien definiert (Formel)?
- c) Erklären Sie in Worten, was man unter „Ruheinduktion“ und was man unter „Bewegungsinduktion“ versteht!
- d) Welchen Wert hat näherungsweise (+/- 5 Ohm) die Wellenimpedanz des Vakuums und wie definiert sie sich aus den Feldkonstanten (Formel)?
- e) Wie lautet die Formel für die so genannte Oberflächenimpedanz eines Körpers, der Skineffekt aufweist?
- f) Ab welcher Frequenz wird die TE₁₀-Mode eines rechteckigen, mit Luft gefüllten Hohlleiters mit den Innenabmessungen 3 cm auf 2 cm ausbreitungsfähig?

Vor- und Zuname:	Matrikel-Nr.:
------------------	---------------

2. Aufgabe

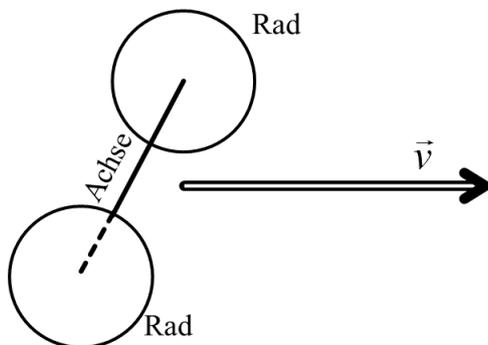
Das magnetische Vektorpotential des Erdmagnetfeldes in Kugelkoordinaten lautet:

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\psi = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2},$$

wobei das magnetische Dipolmoment $m_0 = 7,746 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$ ist.

- a) Wie lauten die drei Komponenten der entsprechenden magnetischen Flussdichte in Kugelkoordinaten (Formeln)?

Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 50 \text{ km/h}$ geradeaus in Hamburg ($\theta = 53,5^\circ$) auf ebener Erde. Die metallischen Achsen des Autos sind $1,2 \text{ m}$ lang.



- b) Berechnen Sie als Zahlenwert die gesamte Spannung, die entlang einer Achse induziert wird (Erdradius = 6371 km)!

Hinweis:

Für alle Zahlenwerte genügen vier signifikante Stellen, also z.B. $1,234 \cdot 10^5$, wobei die letzte Ziffer (hier die 4) gerundet sein soll.

3. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle ($f = 100$ MHz) in einem verlustbehafteten Medium mit $\mu_r = 1$ besitzt die folgende komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke in kartesischen Koordinaten:

$$\hat{\underline{E}}(x, y, z) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{k}(x, y, z) = k_0 \cdot (1,5 - j \cdot 2) \cdot \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei gilt: $E_0 = 1$ V/m , $\phi = 45^\circ$ und $k_0 = 5$ m⁻¹ .

Berechnen Sie im Folgenden als Zahlenwerte:

- die Dämpfungskonstante und die Phasenkonstante der Welle,
- die Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit,
- den komplexen Wellenwiderstand,
- den Betrag der magnetischen Feldstärke im Koordinatenursprung und
- den Phasenunterschied zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Bestimmen Sie als Formel:

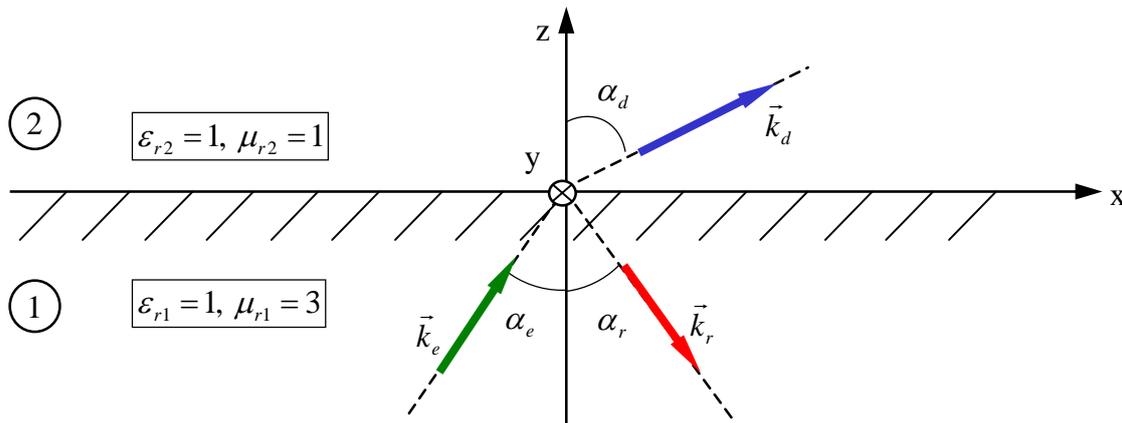
- die komplexe Amplitude der magnetischen Feldstärke.

Hinweis:

Für alle Zahlenwerte genügen vier signifikante Stellen, also z.B. $1,234 \cdot 10^5$, wobei die letzte Ziffer (hier die 4) gerundet sein soll.

4. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle mit der Frequenz $f = 3 \text{ GHz}$ läuft in einem verlustlosen Medium ($\mu_{r1} = 3$) unter dem Einfallswinkel $\alpha_e = 30^\circ$ auf eine ebene Grenzfläche zu einem anderen verlustlosen Medium ($\mu_{r2} = 1$) und wird reflektiert bzw. transmittiert. Der Poyntingvektor der einfallenden Welle befindet sich in der xz -Ebene.



Die einfallende Welle besitzt folgende elektrische Feldkomponenten ($E_0 = 1 \text{ V/m}$):

$$\underline{E}_{xe} = -E_0 \cdot \cos \alpha_e \cdot e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}}, \quad \underline{E}_{ye} = E_0 \cdot e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}}, \quad \underline{E}_{ze} = E_0 \cdot \sin \alpha_e \cdot e^{-j\vec{k}_e \cdot \vec{r}}$$

Berechnen Sie im Folgenden als Zahlenwerte:

- den Durchtrittswinkel und den Winkel für innere Totalreflexion,
- die Beträge der reflektierten und transmittierten elektrischen Feldkomponenten, die senkrecht zur Einfallsebene liegen,
- die Beträge der reflektierten und transmittierten elektrischen Feldkomponenten, die parallel zur Einfallsebene liegen,
- die zeitlich gemittelte, senkrecht durch die Grenzfläche tretende Leistung pro Quadratmeter!

Hinweis:

Für alle Zahlenwerte genügen vier signifikante Stellen, also z.B. $1,234 \cdot 10^5$, wobei die letzte Ziffer (hier die 4) gerundet sein soll.

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichung in integraler Form:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint \rho dV = Q$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} = I$$

b) Skintiefe: $d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \kappa \omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \mu_r \kappa \pi f}}$

- c) Ruheinduktion = Induktion (Erzeugen eines elektrischen Feldes) auf Grund der rein zeitlichen Veränderung eines Magnetfeldes.

Bewegungsinduktion = Induktion auf Grund der Bewegung durch ein räumlich veränderliches Magnetfeld.

d) Wellenwiderstand des Vakuums: $\Gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376,73 \Omega$

e) Oberflächenimpedanz: $\underline{Z}_s = \frac{1+j}{\kappa d} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}$

- f) Die Grenzfrequenz der TE₁₀-Mode ist $f = c_0/2a$ mit $a =$ Länge der breiten Seite (hier 3 cm). Somit folgt $f \approx 5$ GHz.

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Berechnung der magnetischen Flussdichte aus dem Vektorpotential:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2} \end{pmatrix}$$

Hierbei gilt für die Rotation in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \vec{e}_r \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right] + \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\psi) \right] \\ & + \vec{e}_\psi \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Es folgt:

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = \underline{\underline{\frac{\mu_0 m_0}{2\pi r^3} \cdot \cos \theta}}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = \underline{\underline{\frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3} \cdot \sin \theta}}$$

$$\underline{\underline{B_\psi = 0}}$$

- b) Auf Grund der Bewegung der metallischen Achse durch das Erdmagnetfeld wird ein elektrisches Feld induziert (Bewegungsinduktion). Entlang der Achse kann dazu nur die radiale Komponente des Magnetfeldes beitragen:

$$B_r(r = 6371 \text{ km}, \theta = 53,5^\circ) = 3,564 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Geschwindigkeitsvektor und radiale Komponente stehen senkrecht zueinander und das induzierte elektrische Feld ist parallel zur Achse. Es folgt deshalb:

$$u_{ind} = v \cdot B_r \cdot \ell = \frac{50000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \cdot 3,564 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 1,2 \text{ m} = \underline{\underline{0,594 \text{ mV}}}$$

Lösung zur 3. Aufgabe

a) Aus der Propagationskonstanten:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta = j \cdot \underline{k} = j \cdot k_0 \cdot (1,5 - j \cdot 2) = 5 \text{ m}^{-1} \cdot (j \cdot 1,5 + 2) = (10 + j \cdot 7,5) \text{ m}^{-1}$$

folgt die Dämpfungskonstante zu: $\underline{\alpha} = 10 \text{ m}^{-1}$

und die Phasenkonstante zu: $\underline{\beta} = 7,5 \text{ m}^{-1}$

b) Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit folgen aus der Phasenkonstanten zu:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{7,5 \text{ m}^{-1}} = \underline{\underline{0,8378 \text{ m}}}$$

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}}{7,5 \text{ m}^{-1}} = \underline{\underline{0,8378 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

c) Der komplexe Wellenwiderstand ist:

$$\underline{\Gamma} = \frac{\omega \mu_0 \mu_r}{\underline{k}} = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}}{k_0 \cdot (1,5 - j \cdot 2)} = \frac{8\pi^2 \cdot 10 \text{ Hs}^{-1}}{7,5 - j \cdot 10} = \underline{\underline{63,17 \cdot e^{j53,13^\circ} \Omega}}$$

d) Betrag der magnetischen Feldstärke im Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned} \left| \hat{\underline{H}}(0,0,0) \right| &= \left| \frac{\hat{\underline{E}}(0,0,0)}{\underline{\Gamma}} \right| = \left| \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \right| : 63,17 \Omega = \\ &= \left| \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\underbrace{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}_{=1} + 1} \right| : 63,17 \Omega \\ &= 1 \text{ Vm}^{-1} : 63,17 \Omega = \underline{\underline{1,583 \cdot 10^{-2} \text{ A/m}}} \end{aligned}$$

e) Der Phasenunterschied zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke kann am Nullphasenwinkel des komplexen Wellenwiderstandes abgelesen werden:

$$\underline{\underline{\text{Phasenunterschied} = 53,13^\circ}}$$

- f) Die magnetische Feldstärke kann z.B. aus $\text{rot} \hat{\underline{E}} = -j\omega\mu_0\mu_r \hat{\underline{H}}$ bestimmt werden.
Unter Beachtung von:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -j\underline{k}_x \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \text{für } x, y, z \text{ zyklisch}$$

und der Produktregel (siehe z.B. Skript):

$$\text{rot}(c \cdot \vec{A}) = (\text{grad } c) \times \vec{A} + c \cdot (\text{rot } \vec{A})$$

folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{H}} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{rot} \hat{\underline{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \text{grad} (e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -j\underline{k}_x \\ -j\underline{k}_y \\ -j\underline{k}_z \end{pmatrix} \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \vec{k} \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \vec{k} \times \hat{\underline{E}} = \frac{\underline{k}}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \vec{e}_k \times \hat{\underline{E}} = \frac{1}{\underline{\Gamma}} \cdot \vec{e}_k \times \hat{\underline{E}} \end{aligned}$$

Ausführen des Kreuzproduktes ergibt:

$$\hat{\underline{H}} = \frac{1}{\underline{\Gamma}} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{\Gamma}} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Lösung zur 4. Aufgabe

Diese Aufgabe wird mit Hilfe der Fresnelschen Formeln gelöst (siehe z.B. Skript).

- a) Die Anwendung des Brechungsgesetzes führt auf den Durchtrittswinkel:

$$\sin \alpha_d = \frac{k_1}{k_2} \cdot \sin \alpha_e = \sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}} \cdot \sin \alpha_e = \frac{\sqrt{3}}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_d = 60^\circ}}$$

Der Winkel für innere Totalreflexion ist:

$$\sin \alpha_{e-total} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_{e-total} = 35,26^\circ}}$$

- b) Für Feldkomponenten senkrecht zur Einfallsebene (hier die y-Komponente) lautet der Reflexionsfaktor:

$$\underline{r}_E = \frac{\underline{\Gamma}_2 \cos \alpha_e - \underline{\Gamma}_1 \cos \alpha_d}{\underline{\Gamma}_2 \cos \alpha_e + \underline{\Gamma}_1 \cos \alpha_d} = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} \Gamma_0 \cos \alpha_e - \sqrt{\mu_{r1}} \Gamma_0 \cos \alpha_d}{\sqrt{\mu_{r2}} \Gamma_0 \cos \alpha_e + \sqrt{\mu_{r1}} \Gamma_0 \cos \alpha_d} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$$

und der Transmissionsfaktor: $\underline{t}_E = 1 + \underline{r}_E = 1$

Somit:

$$|\underline{E}_{yr}| = |\underline{r}_E \underline{E}_{ye}| = \underline{\underline{0 \text{ V/m}}} \quad |\underline{E}_{yd}| = |\underline{t}_E \underline{E}_{yd}| = \underline{\underline{1 \text{ V/m}}}$$

- c) Für Feldkomponenten parallel zur Einfallsebene (hier die x- und z-Komponenten) lautet der Reflexionsfaktor:

$$\underline{r}_H = \frac{\underline{\Gamma}_1 \cos \alpha_e - \underline{\Gamma}_2 \cos \alpha_d}{\underline{\Gamma}_1 \cos \alpha_e + \underline{\Gamma}_2 \cos \alpha_d} = \frac{\sqrt{\mu_{r1}} \Gamma_0 \cos \alpha_e - \sqrt{\mu_{r2}} \Gamma_0 \cos \alpha_d}{\sqrt{\mu_{r1}} \Gamma_0 \cos \alpha_e + \sqrt{\mu_{r2}} \Gamma_0 \cos \alpha_d} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = 0,5$$

und der Transmissionsfaktor: $\underline{t}_H = 1 + \underline{r}_H = 1,5$

Somit für die reflektierten Feldkomponenten:

$$|\underline{E}_{xr}| = | -r_H \underline{E}_{xe} | = \underline{\underline{0,433 \text{ V/m}}} \quad |\underline{E}_{zr}| = | r_H \underline{E}_{ze} | = \underline{\underline{0,25 \text{ V/m}}}$$

Für die transmittierten Feldkomponenten benützt man die Kenntnis der transmittierten magnetischen Feldstärke:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{xd} &= -\cos \alpha_d \Gamma_2 \underline{H}_{yd} & \underline{E}_{zd} &= \sin \alpha_d \Gamma_2 \underline{H}_{yd} \\ &= -\cos \alpha_d \Gamma_2 t_H \underline{H}_{ye} & &= \sin \alpha_d \Gamma_2 \underline{H}_{ye} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\underline{H}_{ye} = \sqrt{(-E_0 \cdot \cos \alpha_e)^2 + (E_0 \cdot \sin \alpha_e)^2} / \Gamma_2 = E_0 / \Gamma_2$. Es folgt:

$$|\underline{E}_{xd}| = \left| \cos \alpha_d \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} t_H E_0 \right| = \underline{\underline{0,433 \text{ V/m}}} \quad |\underline{E}_{zd}| = \left| \sin \alpha_d \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} t_H E_0 \right| = \underline{\underline{0,75 \text{ V/m}}}$$

d) Der Betrag des Poynting-Vektors der transmittierten Welle ist:

$$|\vec{S}_d| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{E}_d|^2}{|\Gamma_2|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\underline{E}_{xd}|^2 + |\underline{E}_{yd}|^2 + |\underline{E}_{zd}|^2}{|\Gamma_2|} = 2,321 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Daraus kann man die zeitlich gemittelte, senkrecht durch die Grenzfläche pro Quadratmeter tretende Leistung berechnen:

$$S_z = |\vec{S}_d| \cdot \cos \alpha_d = \underline{\underline{1,161 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2}}$$

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Dr. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	9	8	7	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 15. 03. 2013 – 11:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

Hinweise: **1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen. **Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!**

2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“: Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.

Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.

Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

Bearbeiten Sie folgenden Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie hängt die pro Fläche dissipierte Leistung eines Materials im magnetischen Wechselfeldes von seiner spezifischen Leitfähigkeit κ und der Skintiefe d ab (Grenzfall starker Skineffekt)?
- b) Wie lautet die Formel für die induzierte elektrische Feldstärke, die durch Bewegung mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein Magnetfeld \vec{B} entsteht?
- c) Nennen Sie mindestens drei Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen!
- d) Wie lautet der Reflexionskoeffizient (Formel) für das elektrische Feld in Form ebener Wellen bei senkrechtem Einfall auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den jeweiligen Wellenwiderständen $\underline{\Gamma}_1$ und $\underline{\Gamma}_2$ (Einfall aus Medium 1)?
- e) Wie lautet die Formel für den Brechungsindex eines optischen (verlustlosen) Mediums mit relativer Permittivität ϵ_r und relativer Permeabilität μ_r ?
- f) Wie lautet das Brechungsgesetz (Formel) zwischen zwei Medien mit ebener Grenzfläche mit den jeweiligen Brechzahlen n_1 und n_2 ?

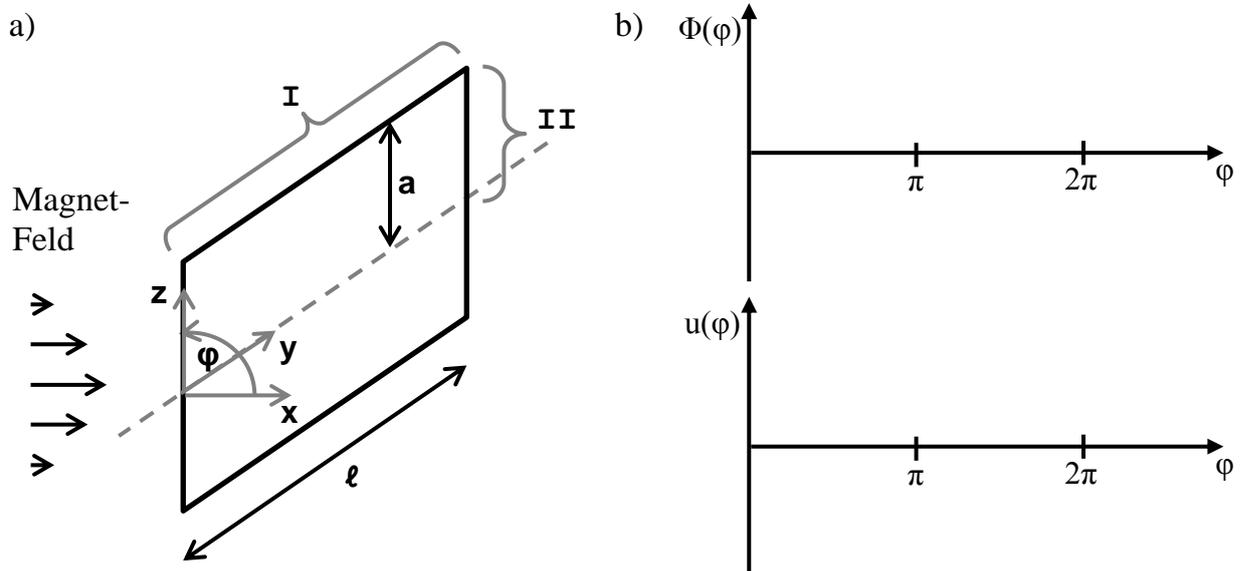
Vor- und Zuname:

Matrikel-Nr.:

2. Aufgabe

Eine Leiterschleife dreht sich wie in Teil a der Abbildung unten gezeigt mit der Winkelgeschwindigkeit ω in mathematisch positiver Richtung um die y-Achse in einem

inhomogenen Magnetfeld, das durch $\vec{B} = B_0 \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \cdot \vec{e}_x$ beschrieben wird.

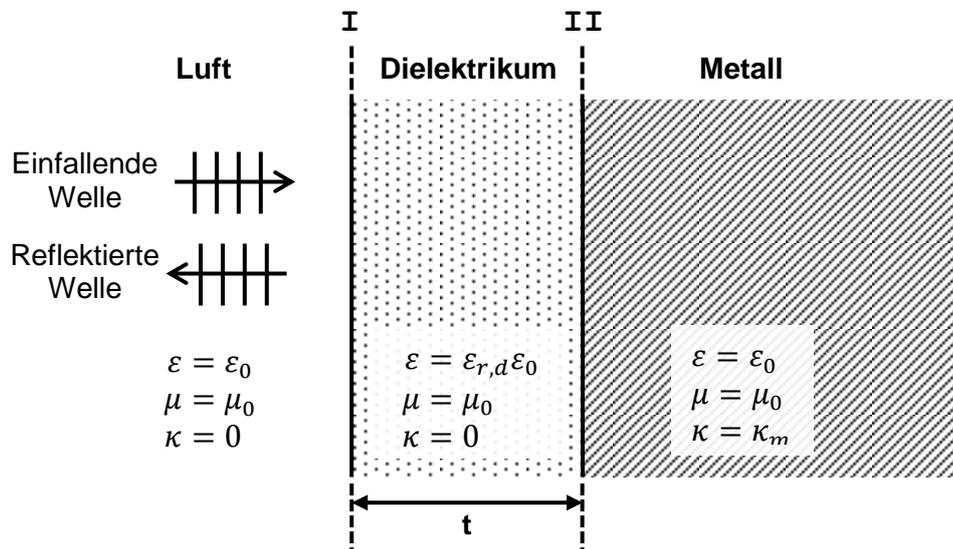


Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Leiterschleife in der Position $\varphi = 0$.

- Berechnen Sie den gesamten magnetischen Fluss Φ in der Leiterschleife als Funktion des Winkels φ mit der x-Achse und der gegebenen Parameter!
- Berechnen Sie die in der gesamten Leiterschleife induzierte Spannung u als Funktion der Zeit t und der gegebenen Parameter! Welche maximale Spannung wird induziert und bei welchem Winkel φ tritt diese auf?
- Berechnen Sie in Abhängigkeit der gegebenen Parameter die induzierten elektrischen Feldstärken $\vec{E}_I(y, t)$ entlang des Leiterabschnitts I und $\vec{E}_{II}(r, t)$ entlang des Leiterabschnitts II (siehe Abbildung). Anmerkung: $r = \sqrt{x^2 + z^2}$.
- Skizzieren Sie in Teil b der Abbildung den Verlauf des magnetischen Flusses Φ und der in der Leiterschleife induzierten Spannung u in Abhängigkeit von der Stellung der Leiterschleife (d.h. vom Winkel φ).

3. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle trifft wie in der Abbildung gezeigt aus der Luft senkrecht auf eine dielektrisch beschichtete, halbunendliche Metallplatte. Alle Grenzflächen sind eben. Die Materialparameter sind in der Abbildung angegeben.



Die folgenden Werte sind gegeben: $\epsilon_{r,d} = 4$; $\kappa_m = 8,6 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$; $f = 5 \text{ GHz}$; $t = 1 \text{ mm}$.

- Berechnen Sie in Zahlenwerten die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für das elektrische Feld an den Übergängen Luft-Dielektrikum, Dielektrikum-Luft und Dielektrikum-Metall unter der Annahme, dass die beiden betrachteten Materialien jeweils den unendlichen Halbraum auf ihrer Seite des Übergangs ganz ausfüllen.
- Berechnen Sie in Zahlenwerten die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für das magnetische Feld an den Übergängen Luft-Dielektrikum, Dielektrikum-Luft und Dielektrikum-Metall unter der Annahme, dass die beiden betrachteten Materialien jeweils den unendlichen Halbraum auf ihrer Seite des Übergangs ganz ausfüllen.

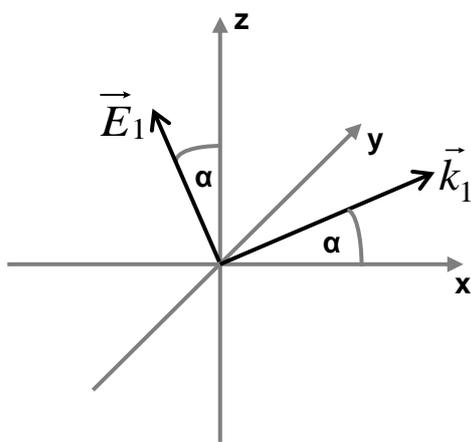
Im Folgenden soll die gesamte Anordnung aus Luft, Dielektrikum und Metall betrachtet werden. Die ortsunabhängigen Anteile der komplexen Amplituden der einfallenden Feldstärken seien mit \hat{E}_e und \hat{H}_e bezeichnet. Berechnen Sie unter Einbeziehung der Mehrfachreflexionen an den Grenzschichten I und II jeweils als Zahlenwert das Verhältnis:

- der elektrische Feldstärke \hat{E}_r der reflektierten Welle zu \hat{E}_e und
- der magnetischen Feldstärke \hat{H}_r der reflektierten Welle zu \hat{H}_e !

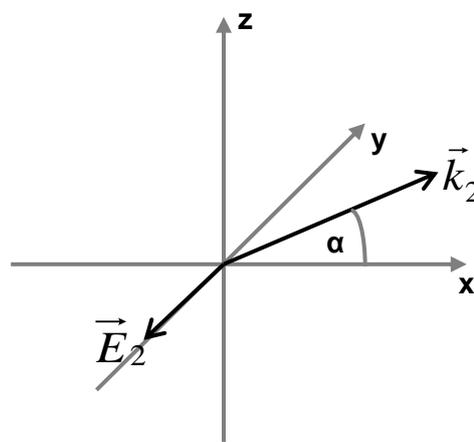
4. Aufgabe

Eine elektromagnetische Welle im Vakuum lässt sich als Überlagerung der beiden in Abbildung a und b dargestellten Teilwellen 1 und 2 beschreiben, bei denen es sich um ebene Wellen mit der Frequenz $f_1 = f_2 = f_0$ handelt. Die Wellenzahlvektoren beider Teilwellen befinden sich in der xz -Ebene und schließen mit der x -Achse einen Winkel α ein. Der elektrische Feldstärkevektor der Welle 1 befindet sich ebenfalls in der xz -Ebene und schließt mit der z -Achse den Winkel α ein. Der elektrische Feldstärkevektor der Welle 2 zeigt in negative y -Richtung.

a)



b)



Zum Zeitpunkt $t = 0$ habe das elektrische Feld \vec{E}_1 im Ursprung des Koordinatensystems den Betrag E_0 und den Phasenwinkel 0 , das elektrische Feld \vec{E}_2 den Betrag E_0 und den Phasenwinkel $\pi/4$.

- Bestimmen Sie zunächst die Wellenzahlvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 als Formel nach Betrag und Richtung! Geben Sie dann die elektrischen Felder $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ und $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ an. Dabei ist davon auszugehen, dass beide Teilwellen nur aus einer hinlaufenden Welle in Richtung des Wellenzahlvektors bestehen.
- Betrachten Sie nun die überlagerte Welle $\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Kann die überlagerte Welle ebenfalls als ebene Welle betrachtet werden? Falls ja, wie ist diese polarisiert?
- Berechnen Sie das Magnetfeld der überlagerten Welle $\vec{H}_{ges} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$!
- Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor der überlagerten Welle nach Betrag und Richtung (\vec{E}_{ges} und \vec{H}_{ges} bzw. deren Amplituden sind dabei als Spitzenwerte aufzufassen)!
- Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des Betrages der elektrischen Feldstärke $|\vec{E}_{ges}(t)| = |\text{Re}\{\vec{E}_{ges}(t)\}|$ im Ursprung des Koordinatensystems!

TU Hamburg-Harburg
Theoretische Elektrotechnik
Prof. Dr. Christian Schuster

M U S T E R L Ö S U N G

Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II
15. 03. 2013 – 11:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Lösung zur 1. Aufgabe

a) Die pro Fläche dissipierte Leistung ist proportional $\frac{1}{kd}$

b) $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$

c) Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen (drei verlangt):

- Orte gleicher Phase (Wellenfronten) sind Ebenen im Raum,
- Ausbreitung erfolgt senkrecht zu den Wellenfronten,
- elektrisches Feld und magnetisches Feld stehen senkrecht aufeinander,
- elektrisches und magnetisches Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung,
- elektrisches und magnetisches Feld sind über die Wellenimpedanz verknüpft.

d) $\underline{r}_E = \frac{\underline{\Gamma}_2 - \underline{\Gamma}_1}{\underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_1}$

e) $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$

f) $n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$ (mit θ_1, θ_2 als den Winkeln zum Lot)

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife berechnet sich durch:

$$\Phi(\varphi) = \iint_A \vec{B}(z) \cdot d\vec{A}(\varphi) \quad \text{wobei} \quad d\vec{A}(\varphi) = dy \cdot dr \cdot \vec{e}_\varphi,$$

Hierbei wurden Zylinderkoordinaten entlang der y-Achse gewählt. Die Flächennormale zeigt hierbei in positive φ -Richtung. Es folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \iint_A B_0 \cdot \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \cdot \vec{e}_x \cdot dy \cdot dr \cdot \vec{e}_\varphi \\ &= \iint_A B_0 \cdot \left(1 - \frac{(r \cdot \sin \varphi)^2}{a^2}\right) \cdot (-\sin \varphi) \cdot dy \cdot dr \\ &= -2lB_0 \cdot \int_0^a \left(\sin \varphi - \frac{r^2}{a^2} \cdot \sin^3 \varphi\right) \cdot dr \\ &= -2lB_0 \cdot \left[r \cdot \sin \varphi - \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{a^2} \cdot \sin^3 \varphi \right]_0^a \\ &= \underline{\underline{-2lB_0 \cdot a \cdot \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \cdot \sin^3 \varphi\right)}} \end{aligned}$$

- b) Die induzierte Spannung entspricht nach dem Induktionsgesetz der totalen zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife:

$$u(t) = - \frac{d\Phi(\varphi(t))}{dt}$$

Die Spannungsrichtung ergibt sich dabei nach der Lenzschen Regel (das Magnetfeld des induzierten Stromes wirkt der Flussänderung entgegen).

Mit $\varphi = \omega t$ folgt:

$$\begin{aligned} u(t) &= 2lB_0 \cdot a \cdot \frac{d}{dt} \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(\omega t) \right) \\ &= 2lB_0 \cdot a \cdot \left(\omega \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \sin^2(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \right) \\ &= 2lB_0 \cdot a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot (1 - \sin^2(\omega t)) \\ &= \underline{\underline{2lB_0 \cdot a \cdot \omega \cdot \cos^3(\omega t)}} \end{aligned}$$

Die maximale Spannung ist also:

$$\underline{\underline{u_{\max}(\varphi = 0) = 2lB_0 \cdot a \cdot \omega}}$$

Anmerkung:

Im Vergleich zum Fall eines homogenen Magnetfeldes ergibt sich in Bezug auf die maximal induzierte Spannung keine Änderung.

- c) Der Ansatz für die induzierte elektrische Feldstärke ist $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$. Für den Leiterabschnitt I:

$$\vec{v} = \omega \cdot a \cdot (\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_z - \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x) \quad \text{und} \quad \vec{B} = B_0 \cdot \left(1 - \frac{(a \cdot \sin \varphi)^2}{a^2}\right) \cdot \vec{e}_x$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E}_I &= \vec{v} \times \vec{B} = \omega \cdot a \cdot (\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_z - \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x) \times B_0 \cdot \left(1 - \sin^2 \varphi\right) \cdot \vec{e}_x \\ &= \omega \cdot a \cdot \cos(\varphi) \cdot B_0 \cdot \left(1 - \sin^2 \varphi\right) \cdot \vec{e}_y = B_0 \cdot \omega \cdot a \cdot \cos^3 \varphi \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

Mit $\varphi = \omega t$:

$$\underline{\underline{\vec{E}_I(y, t) = B_0 \cdot a \cdot \omega \cdot \cos^3(\omega t) \cdot \vec{e}_y}}$$

Das elektrische Feld entlang des Leiterabschnitts I hängt somit nur von der Zeit t , nicht jedoch von der Position y entlang des Leiterabschnitts ab.

Die Betrachtung lässt sich vollkommen analog für Leiterabschnitt II durchführen, wobei gesetzt werden muss:

$$\vec{v} = \omega \cdot r \cdot (\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_z - \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x) \quad \text{und} \quad \vec{B} = B_0 \cdot \left(1 - \frac{(r \cdot \sin \varphi)^2}{a^2}\right) \cdot \vec{e}_x$$

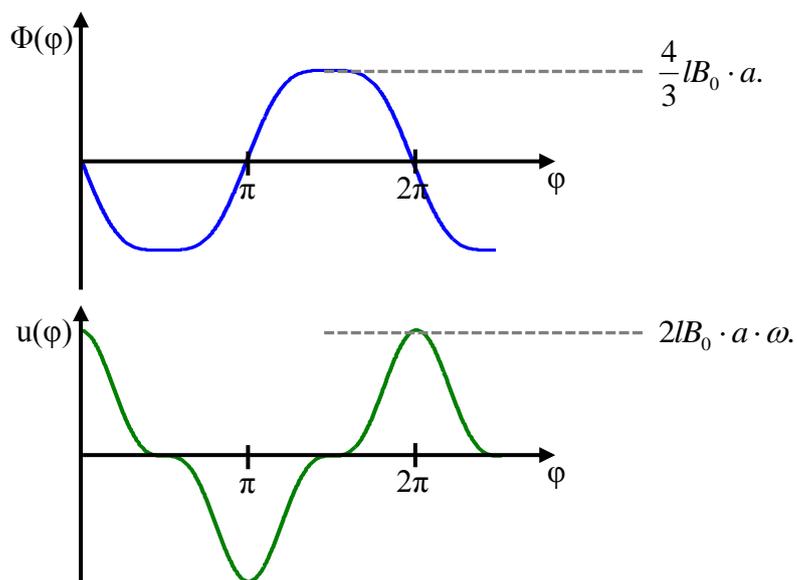
Mit $\varphi = \omega t$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{II}(r, t) &= \vec{v} \times \vec{B} = \omega \cdot r \cdot (\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_z - \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x) \times B_0 \cdot \left(1 - r^2 \cdot \frac{\sin^2(\varphi)}{a^2}\right) \cdot \vec{e}_x \\ &= \omega \cdot r \cdot B_0 \cdot \left(1 - r^2 \cdot \frac{\sin^2(\omega t)}{a^2}\right) \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

Anmerkung:

Während die elektrische Feldstärke bei Leiterabschnitt I parallel zum Leiter verläuft und für einen Spannungsabfall entlang dieses Leiterabschnitts sorgt, steht die elektrische Feldstärke bei Leiterabschnitt II senkrecht auf dem Leiter und erzeugt keinen Spannungsabfall.

- d) Der magnetische Fluss hängt mit $-\left(\sin(\varphi) - \frac{1}{3}\sin^3(\varphi)\right)$ von φ ab. Dies führt auf einen sinusartigen Kurvenverlauf mit abgeflachten Minima und Maxima. Der Verlauf der induzierten Spannung ergibt sich durch graphisches Ableiten.



Lösung zur 3. Aufgabe

- a) Die Formeln für Reflexions- und Transmissionsfaktoren des elektrischen Feldes bei senkrechtem Einfall vom Medium 1 ins Medium 2 lauten

$$\underline{r}_{E,12} = \frac{\underline{\Gamma}_2 - \underline{\Gamma}_1}{\underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_1} \quad \text{und} \quad \underline{t}_{E,12} = 1 + \underline{r}_{E,12} = \frac{2\underline{\Gamma}_2}{\underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_1}$$

mit

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}}$$

Die gegebenen Materialparameter führen auf die folgenden Wellenimpedanzen:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_1 = \underline{\Gamma}_L &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,73 \, \Omega \\ \underline{\Gamma}_2 = \underline{\Gamma}_D &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r,d}\varepsilon_0}} = 188,37 \, \Omega \\ \underline{\Gamma}_3 = \underline{\Gamma}_M &\approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\kappa_m}} = 47,909 \, \text{m}\Omega \cdot (1 + j) \end{aligned}$$

Die gesuchten Reflexions- und Transmissionsfaktoren lassen sich nun durch Einsetzen in die Formeln bestimmen:

$$\begin{array}{lll} \underline{r}_{E,LD} = -\frac{1}{3} & \underline{r}_{E,DL} = \frac{1}{3} & \underline{r}_{E,DM} = -0,9995 + j \cdot 5,084 \cdot 10^{-4} \\ \underline{t}_{E,LD} = \frac{2}{3} & \underline{t}_{E,DL} = \frac{4}{3} & \underline{t}_{E,DM} = 5,087 \cdot 10^{-4} + j \cdot 5,084 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

- b) Für das magnetische Feld gilt:

$$\underline{r}_{H,12} = -\underline{r}_{E,12} = \frac{\underline{\Gamma}_1 - \underline{\Gamma}_2}{\underline{\Gamma}_1 + \underline{\Gamma}_2} \quad \text{und} \quad \underline{t}_{H,12} = 1 + \underline{r}_{H,12} = \frac{2\underline{\Gamma}_1}{\underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_1}$$

Damit:

$$\begin{array}{lll} \underline{r}_{H,LD} = \frac{1}{3} & \underline{r}_{H,DL} = -\frac{1}{3} & \underline{r}_{H,DM} = 0,9995 - j \cdot 5,084 \cdot 10^{-4} \\ \underline{t}_{H,LD} = \frac{4}{3} & \underline{t}_{H,DL} = \frac{2}{3} & \underline{t}_{H,DM} = 1,9995 - j \cdot 5,084 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

- c) Mit den in Aufgabenteil a berechneten Reflexions- und Transmissionsfaktoren lässt sich das elektrische Feld der reflektierten Welle wie folgt als unendliche Summe darstellen (vergleiche die entsprechende Übungsaufgabe):

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{E}}_r = \widehat{\underline{E}}_e \cdot [& \underline{r}_{E,LD} + \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk2t} \\ & + \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM}^2 \cdot \underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk4t} \\ & + \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM}^3 \cdot \underline{r}_{E,DL}^2 \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk6t} \\ & + \dots] , \end{aligned}$$

Hierbei entspricht der erste Term dem an der Grenzfläche I reflektierten Anteil, der zweite dem an der Grenzfläche II reflektiertem Anteil und alle weiteren Terme den (unendliche vielen) Mehrfachreflexionen. Der Exponentialterm e^{-jk2t} berücksichtigt hierbei die Phasenverschiebung der Welle beim Durchlaufen (hin und zurück) der dielektrischen Schicht. Als Kreiswellenzahl k muss somit die des Dielektrikums gewählt werden,

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_{r,d} \epsilon_0} = 209,58 \frac{1}{\text{m}} .$$

Wie in der entsprechenden Übungsaufgabe lässt sich durch Ausnutzung der geometrischen Reihenformel der Ausdruck umformen zu:

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{E}}_r &= \widehat{\underline{E}}_e \cdot \underline{r}_{E,LD} + \widehat{\underline{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \\ & \quad [1 + (\underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot e^{-jk2t}) + (\underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot e^{-jk2t})^2 + \dots] \\ &= \widehat{\underline{E}}_e \cdot \underline{r}_{E,LD} + \widehat{\underline{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \frac{1}{1 - \underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot e^{-jk2t}} \\ &= \widehat{\underline{E}}_e \cdot \left[\underline{r}_{E,LD} + \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \frac{1}{1 - \underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot e^{-jk2t}} \right] \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass $|\underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot e^{-jk2t}| < 1$ ist.

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\underline{E}}_r}{\widehat{\underline{E}}_e} &= \left[-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (-0,9995 + j \cdot 5,084 \cdot 10^{-4}) \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{-j \cdot 0,41916} \right. \\ & \quad \left. \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot (-0,9995 + j \cdot 5,084 \cdot 10^{-4}) \cdot e^{-j \cdot 0,41916} \right)^{-1} \right] \\ &= \underline{\underline{-0,9773 + j \cdot 0,2105}} \end{aligned}$$

- d) Das magnetische Feld der reflektierten Welle lässt sich analog zum elektrischen Fall in Aufgabenteil c berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{H}}_r &= \underline{\hat{H}}_e \cdot \underline{r}_{H,LD} + \underline{\hat{H}}_e \cdot \underline{t}_{H,LD} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot \underline{t}_{H,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \\ &\quad \left[1 + (\underline{r}_{H,DL} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot e^{-jk2t}) + (\underline{r}_{H,DL} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot e^{-jk2t})^2 + \dots \right] \\ &= \underline{\hat{H}}_e \cdot \underline{r}_{H,LD} + \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{H,LD} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot \underline{t}_{H,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \frac{1}{1 - \underline{r}_{H,DL} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot e^{-jk2t}} \\ &= \underline{\hat{H}}_e \cdot \left[\underline{r}_{H,LD} + \underline{t}_{H,LD} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot \underline{t}_{H,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \frac{1}{1 - \underline{r}_{H,DL} \cdot \underline{r}_{H,DM} \cdot e^{-jk2t}} \right]\end{aligned}$$

Mit den Ersetzungen:

$$\underline{r}_{H,12} = -\underline{r}_{E,12} = \underline{r}_{E,21} \quad \text{und} \quad \underline{t}_{H,12} = 1 + \underline{r}_{H,12} = 1 + \underline{r}_{E,21} = \underline{t}_{E,21}$$

folgt:

$$\underline{\hat{H}}_r = \underline{\hat{H}}_e \cdot \left[-\underline{r}_{E,LD} - \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jk2t} \cdot \frac{1}{1 - \underline{r}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DM} \cdot e^{-jk2t}} \right]$$

Der Ausdruck in der Klammer ist bis auf das Vorzeichen identisch zum dem aus Aufgabenteil c und damit folgt:

$$\underline{\underline{\underline{\frac{\hat{H}}{H}_r = 0,9773 - j \cdot 0,2105}}}}_{\underline{\underline{\underline{\hat{H}}_e}}}$$

Anmerkung:

Dies kann auch direkt aus der Verkoppelung elektrischer und magnetischer Felder über die Wellenimpedanz und der Laufrichtung der reflektierten Welle geschlossen werden.

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Da beide Wellen im Vakuum mit gleicher Frequenz in die gleiche Richtung laufen, sind die Wellenzahlvektoren identisch. Für beide ergibt sich:

$$\underline{\underline{\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}}}$$

mit $\omega = 2\pi f_0$. Unter Verwendung dieses Wellenzahlvektors lassen sich die elektrischen Felder $\underline{\underline{\vec{E}_1}}$ und $\underline{\underline{\vec{E}_2}}$ wie folgt als Phasoren darstellen:

$$\underline{\underline{\vec{E}_1 = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\vec{E}_2 = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \pi/4)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

- b) Da die beiden überlagerten ebenen Wellen den gleichen Wellenzahlvektor aufweisen, ergibt sich aus der Überlagerung wiederum eine ebene Welle mit gleicher Ausbreitungsrichtung und gleicher Frequenz. Elektrisches und magnetisches Feld stehen weiterhin senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die überlagerte Welle ist

elliptisch polarisiert

da die beiden Teilwellen eine Phasendifferenz von $\pi/4$ aufweisen (sich also weder eine lineare noch eine zirkulare Polarisation ergibt).

- c) Unter Ausnützung der Wellenimpedanz des Vakuums $\underline{\underline{\Gamma_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}}}$ und der Tatsache, dass magnetisches und elektrisches Feld stets senkrecht aufeinander und jeweils zur Ausbreitungsrichtung stehen, lässt sich ableiten:

$$\underline{\underline{\vec{H}_{ges} = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}} \cdot \left(e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \pi/4)} \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \right)}}$$

- d) Der komplexe Poynting-Vektor ist hier:

$$\underline{\underline{\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E}_{ges} \times \vec{H}_{ges}^* = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \times (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)^*}}$$

Beim Ausführen des Kreuzproduktes fallen die Mischterme 12 und 21 weg, da die entsprechenden Feldrichtungen parallel bzw. antiparallel sind. Es bleibt:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* + \vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* \right)$$

Beide Anteile des Poynting-Vektors zeigen (natürlich) in die Ausbreitungsrichtung. Es folgt dann einfach:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} + \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0^2}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

Die Divergenz des Poynting-Vektors ist null, es wird keine Leistung dissipiert.

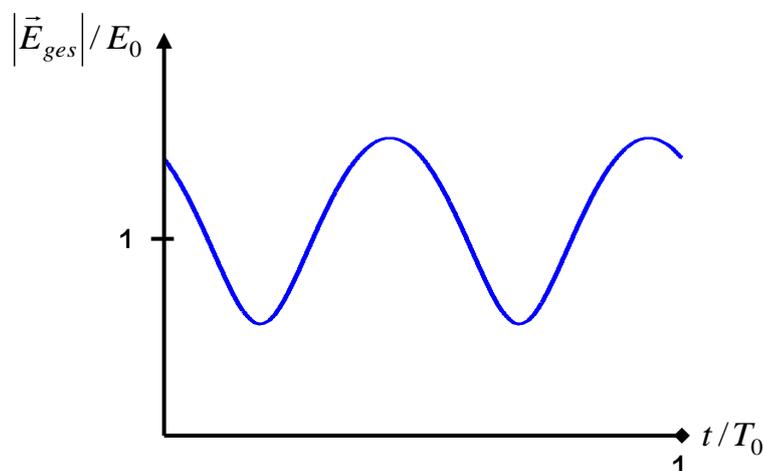
e) Im Zeitbereich lässt sich die überlagerte Welle darstellen als:

$$\vec{E}_{ges}(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + E_0 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \pi/4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bilden des Betragsquadrats und Auswertung nur im Ursprung des Koordinatensystems (so dass der Anteil $\vec{k}\vec{r}$ zu 0 wird) liefert:

$$\underline{\underline{|\vec{E}_{ges}(t)| = E_0 \cdot \sqrt{\cos^2(\omega t) + \cos^2(\omega t + \pi/4)}}}$$

Skizze (war nicht verlangt):



TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	9	7	8	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 09.08.2013 – 9:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

- Hinweise:**
- 1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen.
Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!
- 2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“:** Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.
- Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.
- Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

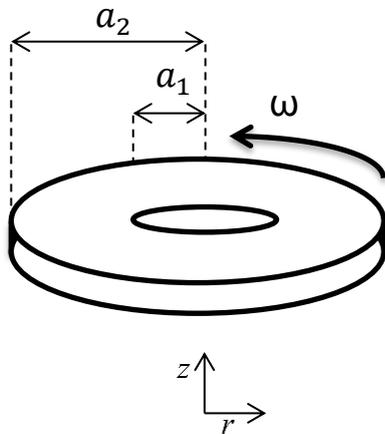
Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form?
- b) Wie lautet die Helmholtz-Gleichung für die elektrische Feldstärke?
- c) Wie lautet die Formel für den komplexen Poynting-Vektor?
- d) Wie groß ist der Strahlungswiderstand eine Hertzschen Dipols in Ohm (+/- 5 %), dessen Länge 1/10 der abgestrahlten Wellenlänge beträgt?
- e) Erklären Sie in Worten, warum der Taghimmel blau erscheint!
- f) Wie groß ist die innere (interne) Induktivität pro cm (+/- 5 %) eines gleichmäßig von Strom durchflossenen, runden Leiters ?

Vor- und Zuname:	Matrikel-Nr.:
------------------	---------------

2. Aufgabe

Betrachtet wird eine elektrisch leitende, rotierende Kreisscheibe in einem inhomogenen Magnetfeld (siehe Skizze, ℓ hierbei ein konstanter Parameter mit der Einheit m). Die Winkelgeschwindigkeit betrage ω , der Innenradius sei a_1 und der Außenradius sei $a_2 = 2a_1$. Die Leitfähigkeit der Scheibe betrage σ_0 und die Dicke betrage h .



$$\vec{B} = -\frac{B_0}{\ell^2} \cdot (r - a_1) \cdot (r - a_2) \cdot \vec{e}_z$$

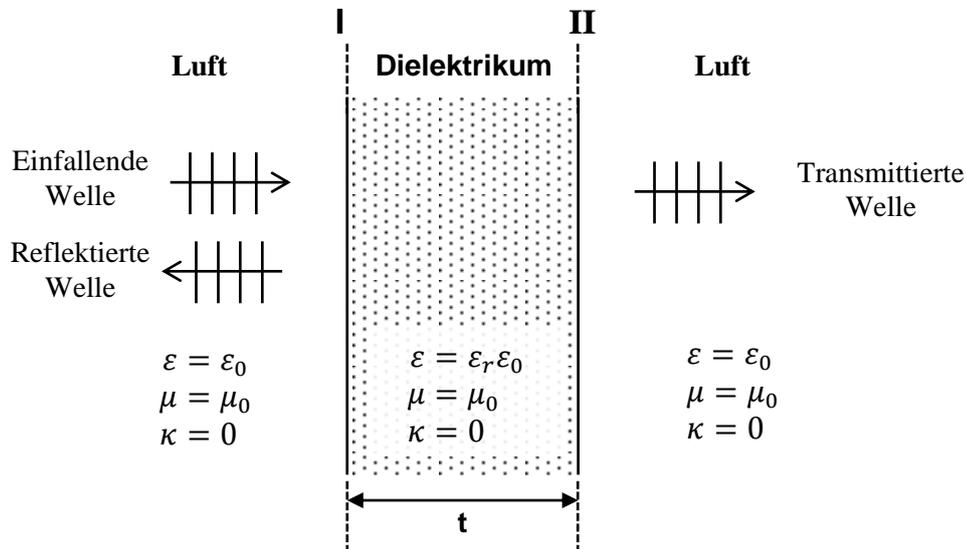
($B_0 > 0$)

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- Berechnen Sie die induzierte elektrische Feldstärke in der Kreisscheibe als Funktion der gegebenen Parameter! Wie ist sie gerichtet? Bei welchem r liegt ihr Maximum?
- Skizzieren Sie das magnetische Feld und das induzierte elektrische Feld über dem Querschnitt der Kreisscheibe als Funktion des Abstandes r von der Achse!
- Welche Spannung U_{ind} zwischen innerem und äußerem Rand folgt aus dem induzierten elektrischen Feld?
- Berechnen Sie den Gleichstromwiderstand R der Kreisscheibe zwischen innerem und äußerem Rand!
- Im Folgenden sei der innere Rand mit dem äußeren Rand über einen äußeren, einstellbaren Verbraucherwiderstand R_V leitend verbunden. Welche maximale Leistung P_V kann in dem Verbraucher umgesetzt werden ($\omega = \text{konstant}$)?

3. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle trifft senkrecht auf eine dielektrische Wand mit endlicher Dicke und wird teilweise reflektiert bzw. teilweise transmittiert wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Es gelten die folgenden Werte: $\epsilon_r = 6$; $t = 2,5 \mu\text{m}$.



Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

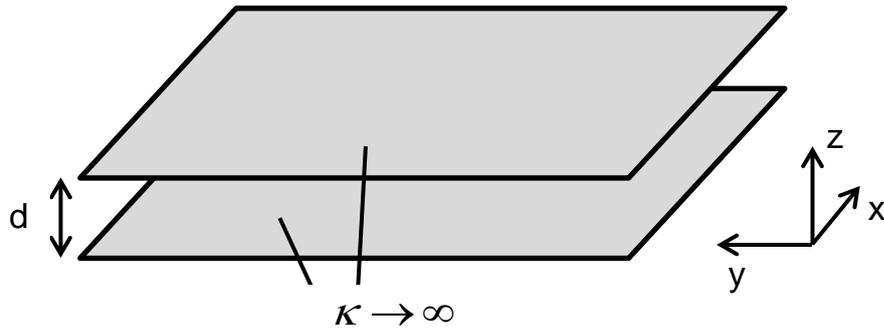
- a) Berechnen Sie in Zahlenwerten die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für das elektrische Feld an den Übergängen Luft \rightarrow Dielektrikum und Dielektrikum \rightarrow Luft unter der Annahme, dass die beiden betrachteten Materialien jeweils den unendlichen Halbraum auf ihrer Seite des Übergangs ganz ausfüllen!

Im Folgenden soll die gesamte Anordnung aus Luft, Dielektrikum und Luft betrachtet werden.

- b) Bestimmen Sie die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke \hat{E}_d der transmittierten Welle in Abhängigkeit der Amplitude der einfallenden Welle \hat{E}_e unter Einbeziehung der Mehrfachreflexion an den Grenzschichten I und II!
- c) Berechnen Sie jeweils in Zahlenwerten die ersten zwei Frequenzen (> 0 Hz), für die der Betrag der Amplitude des durchtretenden elektrischen Feldes minimal bzw. maximal ist!

4. Aufgabe

Betrachtet werden zwei parallele, ideal leitfähige Platten (eine bei $z = 0$, die andere bei $z = d$), zwischen denen ein elektromagnetisches Feld in x-Richtung propagiert (siehe Skizze). Im Zwischenraum der Leiterplatten liegt ein Medium mit $\epsilon_r > 1$ vor. Die Leiterplatten seien in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt.



Gegeben ist folgendes magnetische Feld zwischen den Leiterplatten (kartesische Koordinaten, A_m und B_m konstante Parameter, m ganzzahlig):

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{H}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -j/\beta \cdot (A_m \cos(m\pi z/d) - B_m \sin(m\pi z/d)) \\ \frac{jd}{\beta^2 m\pi} \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \beta^2 \right) \cdot A_m \\ \frac{d}{m\pi} \cdot (A_m \sin(m\pi z/d) + B_m \cos(m\pi z/d)) \end{bmatrix} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- Bestimmen Sie mit Hilfe des magnetischen Feldes das elektrische Feld \vec{E} der Welle!
- Wie lauten die Randbedingungen für das elektrische Feld an den Leiterplatten? Bestimmen Sie durch Anpassen dieser Randbedingungen die Parameter A_m und B_m für $m > 0$. Hierbei soll angenommen werden, dass das elektrische Feld in keiner Komponente eine Nullstelle besitzt und der Betrag des elektrischen Feldes bei $z = d/2$ den Wert E_0 annimmt.
- Bestimmen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Oberflächenladungsdichte und die zweidimensionale Stromdichte (Oberflächenstromdichte) auf der unteren Leiterplatte!

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichungen in differentieller Form:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- b) Helmholtzgleichung: $\Delta \underline{\hat{E}} + \underline{k}^2 \cdot \underline{\hat{E}} = 0$ (\underline{k} = Wellenzahl)

- c) Komplexer Poynting-Vektor: $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{E}} \times \underline{\hat{H}}^*$

- d) Strahlungswiderstand eines Hertzschen Dipols (im Vakuum) $\approx 789 \Omega \cdot (l/\lambda)^2$.
Hier $l/\lambda = 1/10$, deshalb folgen $\approx 7,89 \Omega$.

- e) Der Taghimmel erscheint hell, weil das (weiße) Sonnenlicht an den Molekülen der Atmosphäre gestreut wird. Die Moleküle sind typischerweise klein gegen die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes und verhalten sich in erster Näherung wie Hertzsche Dipole. Diese strahlen umso effektiver, je kleiner die Wellenlänge ist (siehe Teilaufgabe e). Deshalb wird blau stärker gestreut als rot, was die Farbe erklärt.

- d) Innere (interne) Gleichstrominduktivität eines runden Leiters pro Länge:

$$\frac{\mu_0 \mu_r}{8\pi} = 0,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} = 5 \frac{\mu\text{H}}{\text{cm}} \quad (\mu_r = 1)$$

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Das induzierte elektrische Feld berechnet sich durch $\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B}$, wobei die Geschwindigkeit durch die Winkelgeschwindigkeit mit $\vec{v} = \omega r \vec{e}_\varphi$ und das magnetische Feld durch die Aufgabe gegeben ist. Es folgt:

$$\underline{\underline{\vec{E}_{ind} = \frac{-\omega B_0 r}{\ell^2} \cdot (r - a_1) \cdot (r - a_2) \cdot \vec{e}_r}}$$

Da $a_1 \leq r \leq a_2$ gilt,

zeigt das elektrische Feld radial nach außen.

Sein Maximum für $a_1 \leq r \leq a_2$, erhält man durch Nullsetzen der ersten Ableitung seines Betrages:

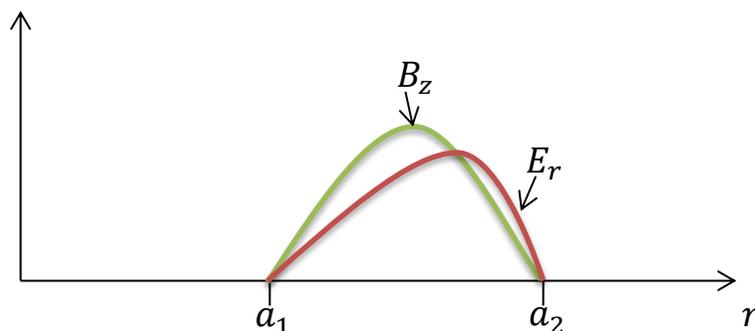
$$\frac{\partial E_{ind}}{\partial r} = \frac{-\omega B_0 r}{\ell^2} \cdot (3r^2 - 2a_2 r - 2a_1 r + a_1 a_2) = 0$$

Mit $a_2 = 2a_1$ folgt die quadratische Gleichung bzw. die Lösung im Definitionsbereich von r zu:

$$3r^2 - 6a_1 r + 2a_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{r = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot a_1}}$$

Auf den Nachweis des Maximums kann verzichtet werden (Anschauung).

- b) Skizzen:



- c) Die Spannung zum induzierten elektrischen Feld folgt aus (Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned}
U_{\text{ind}} &= \int_{a_1}^{a_2} E_{\text{ind}} dr = \frac{-B_0 \omega}{\ell^2} \cdot \int_{a_1}^{2a_1} r \cdot (r - a_1) \cdot (r - 2a_1) dr \\
&= \frac{-B_0 \omega}{\ell^2} \cdot \int_{a_1}^{2a_1} (r^3 - 3a_1 r^2 + 2a_1^2 r) dr = \frac{-B_0 \omega}{\ell^2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 - a_1 r^3 + a_1^2 r^2 \right]_{a_1}^{2a_1} \\
&= \frac{-B_0 \omega}{\ell^2} \cdot \left[4a_1^4 - 8a_1^4 + 4a_1^4 - \left(\frac{1}{4} a_1^4 - a_1^4 + a_1^4 \right) \right] = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot \frac{\omega B_0 a_1^4}{\ell^2}}}
\end{aligned}$$

- d) Der Gleichstromwiderstand kann aus dem Ansatz für ein infinitesimal kurzes Widerstandselement $dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{A}$ berechnet werden, wobei die Fläche A von der Länge l abhängt. Für ein Kreisscheibensegment lautet dies:

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{2\pi r h}$$

Die gesamte Kreisscheibe kann als Reihenschaltung dieser Elemente aufgefasst werden. Damit lautet der Gesamtwiderstand:

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_0 h} \cdot \int_{a_1}^{2a_1} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2\pi\sigma_0 h} \cdot [\ln(r)]_{a_1}^{2a_1} = \frac{\ln(2a_1/a_1)}{2\pi\sigma_0 h} = \underline{\underline{\frac{\ln(2)}{2\pi\sigma_0 h}}}$$

Alternativ kann man z.B. mit der Formel für die Kapazität eines Zylinderkondensators starten $C = 2\pi\epsilon_0 h / \ln(a_2/a_1)$ und über $RC = \epsilon_0/\sigma_0$ gehen.

- e) Die maximale Leistung im Verbraucherwiderstand kann umgesetzt werden, wenn $R = R_V$ (Leistungsanpassung). Es gilt dann:

$$P = \frac{U_{\text{ind}}^2}{4R} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\omega B_0 a_1^4}{\ell^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{8\pi\sigma_0 h}{\ln(2)} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 B_0^2 a_1^8}{\ell^4} \cdot \frac{\pi\sigma_0 h}{\ln(2)}}}$$

Lösung zur 3. Aufgabe

- a) Die Formeln für Reflexions- und Transmissionsfaktoren des elektrischen Feldes bei senkrechtem Einfall vom Medium 1 ins Medium 2 lauten (siehe z.B. Skript):

$$\underline{r}_{E,12} = \frac{\underline{\Gamma}_2 - \underline{\Gamma}_1}{\underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_1} \quad \text{und} \quad \underline{t}_{E,12} = 1 + \underline{r}_{E,12} = \frac{2\underline{\Gamma}_2}{\underline{\Gamma}_2 + \underline{\Gamma}_1}$$

mit:

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}}$$

Die gegebenen Materialparameter führen auf die folgenden Wellenimpedanzen:

$$\underline{\Gamma}_1 = \underline{\Gamma}_L = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,7 \, \Omega \quad \underline{\Gamma}_2 = \underline{\Gamma}_D = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = 153,8 \, \Omega$$

Daraus folgt für den Übergang Luft \rightarrow Dielektrikum:

$$\underline{r}_{E,LD} = -0,4202 \quad \underline{t}_{E,LD} = 0,5798$$

Und für den Übergang Dielektrikum \rightarrow Luft:

$$\underline{r}_{E,DL} = 0,4202 \quad \underline{t}_{E,DL} = 1,4202$$

- b) Die Amplitude des elektrischen Feldes der gesamten transmittierten Welle ergibt sich durch Addition aller transmittierten Teilwellen unter Berücksichtigung der Vielfachreflexionen (siehe z.B. Übungsaufgabe):

$$\begin{aligned} \underline{\hat{E}}_d &= \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jkt} + \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk3t} \\ &\quad + \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DL}^4 \cdot e^{-jk5t} + \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot \underline{r}_{E,DL}^6 \cdot e^{-jk7t} + \dots \\ &= \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jkt} \cdot \left[1 + \underline{r}_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk2t} + (\underline{r}_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk2t})^2 + (\underline{r}_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk2t})^3 + \dots \right] \\ &= \underline{\hat{E}}_e \cdot \underline{t}_{E,LD} \cdot \underline{t}_{E,DL} \cdot e^{-jkt} \cdot \left[\frac{1}{1 - \underline{r}_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk2t}} \right] \end{aligned}$$

Der Exponentialterm e^{-jkt} berücksichtigt hierbei die Phasenverschiebung der Welle beim n -maligen Durchlaufen des Dielektrikums. Die Summe wurde hier mit der Formel für eine unendliche geometrische Reihe zusammengefasst.

c) Der Betrag des durchtretenden elektrischen Feldes lautet:

$$\left| \widehat{E}_d \right| = \underbrace{\left| \widehat{E}_e \right| \cdot t_{E,LD} \cdot t_{E,DL}}_{=\text{konst}} \cdot \left| e^{-jkt} \right| \cdot \frac{1}{\left| 1 - r_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk2t} \right|}$$

Die Minima und Maxima lassen sich über die Extrema des Nenners bestimmen:

$$\begin{aligned} \left| 1 - r_{E,DL}^2 \cdot e^{-jk2t} \right| &= \left| \left(1 - r_{E,DL}^2 \cos(-2kt) \right) + j \cdot \left(-r_{E,DL}^2 \sin(-2kt) \right) \right| \\ &= \sqrt{\left(1 - r_{E,DL}^2 \cos(2kt) \right)^2 + r_{E,DL}^4 \sin^2(2kt)} \\ &= \sqrt{1 - 2r_{E,DL}^2 \cos(2kt) + r_{E,DL}^4 \cos^2(2kt) + r_{E,DL}^4 \sin^2(2kt)} \\ &= \sqrt{1 - 2r_{E,DL}^2 \cos(2kt) + r_{E,DL}^4} \\ &= \text{min/ max !} \end{aligned}$$

Oder:

$$\underbrace{1 - 2 \cdot r_{E,DL}^2 \cdot \cos(2kt) + r_{E,DL}^4}_{g(k)} = \text{min/ max !}$$

Hierbei ist $k = \omega / v_{\text{ph}} = 2\pi f \sqrt{\epsilon_r} / c_0$. Bilden der Ableitung liefert:

$$\frac{\partial g(k)}{\partial k} = 4 \cdot r_{E,DL}^2 \cdot t \cdot \sin(2kt)$$

Daraus folgt, dass lokale Extrema (Nullstellen der Ableitung) für folgende k -Werte auftreten:

$$k = n \cdot \pi / 2t, \quad n = (0), 1, 2, 3, \dots$$

Durch bilden der zweiten Ableitung erhält man die Minima und Maxima

$$\frac{\partial^2 g(k)}{\partial k^2} = 4 \cdot r_{E,DL}^2 \cdot t^2 \cdot \cos(2kt)$$

Minima des Nenners (Maxima des Feldes) für $\cos(n\pi) > 0$, $n = (0), 2, 4, \dots$

Maxima des Nenners (Minima des Feldes) für $\cos(n\pi) < 0$, $n = 1, 3, 5, \dots$

Die Frequenzen sind folglich:

Minima für: $f = n \cdot v_{\text{ph}} / 4t = \underline{\underline{12,24 \text{ THz}, 36,72 \text{ THz}, \dots}}$

Maxima für: $f = n \cdot v_{\text{ph}} / 4t = \underline{\underline{24,48 \text{ THz}, 48,96 \text{ THz}, \dots}}$

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Das elektrische Feld lässt sich über die Maxwellsche Rotationsgleichung bestimmen:

$$\nabla \times \underline{\underline{H}} = \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial t} = j\omega \varepsilon_o \varepsilon_r \cdot \underline{\underline{E}}$$

Hier gilt auf Grund der Aufgabenstellung:

$$\nabla \times \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{e}}_x \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z}}_{=0} \right) + \underline{\underline{e}}_y \cdot \left(\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \right) + \underline{\underline{e}}_z \cdot \left(\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y}}_{=0} \right)$$

Es verbleibt:

$$\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} = j \frac{m\pi}{\beta d} \cdot (A_m \sin(m\pi z/d) + B_m \cos(m\pi z/d)) \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} = \frac{d}{\beta m\pi} \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \beta^2 \right) \cdot A_m \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = -j \frac{\beta d}{m\pi} \cdot (A_m \sin(m\pi z/d) + B_m \cos(m\pi z/d)) \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

Damit lautet das elektrische Feld:

$$\underline{\underline{E}}_x = 0$$

$$\underline{\underline{E}}_y = \frac{1}{\omega \varepsilon_o \varepsilon_r} \cdot \frac{d}{\beta m\pi} \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \beta^2 \right) \cdot (A_m \sin(m\pi z/d) + B_m \cos(m\pi z/d)) \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\underline{\underline{E}}_z = \frac{-j}{\omega \varepsilon_o \varepsilon_r} \cdot \frac{d}{\beta m\pi} \cdot \left(\left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 + \beta^2 \right) \cdot A_m \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

- b) Die Randbedingungen an den ideal leitfähigen Leiterplatten ist das Verschwinden der tangentialen elektrischen Feldstärke:

$$\underline{\underline{E}}_y(z=0) = 0 \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E}}_y(z=d) = 0$$

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	7	8	9	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 21. 2. 2014 – 9:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

- Hinweise:**
- 1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen.
Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!
- 2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“:** Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.
- Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.
- Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

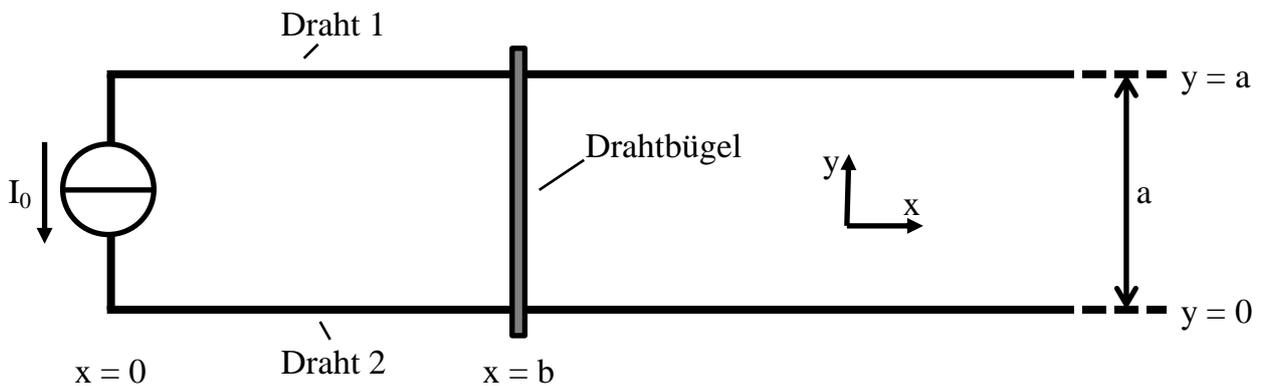
1. Aufgabe

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie lauten die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form für komplexe Feldamplituden?
- b) Nennen Sie mindestens fünf Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen!
- c) Wie lautet der Reflexionskoeffizient (Formel) für das elektrische Feld in Form ebener Wellen bei senkrechtem Einfall auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den jeweiligen Wellenwiderständen η_1 und η_2 (Einfall aus Medium 1)?
- d) Wie berechnet sich die Wellenzahl (Kreiswellenzahl) für ein verlustloses, nicht leitfähiges Medium aus seinen Eigenschaften (Formel)?
- e) Wie groß ist der Feldwellenwiderstand des Vakuums η_0 in Ohm (+/- 5 %)?
- f) Erklären Sie in Worten, wie die Farben des Regenbogens zustande kommen!

2. Aufgabe

Zwei lange, parallel angeordnete Drähte mit Durchmesser d im Achsenabstand a sind über einen Anschlussdraht mit vernachlässigbar kleinem Durchmesser mit einer Gleichstromquelle verbunden. Der Stromkreis wird durch einen aufliegenden Drahtbügel mit ebenfalls vernachlässigbar kleinem Durchmesser geschlossen. Alle Drähte seien elektrisch perfekt leitend (kein Widerstand):

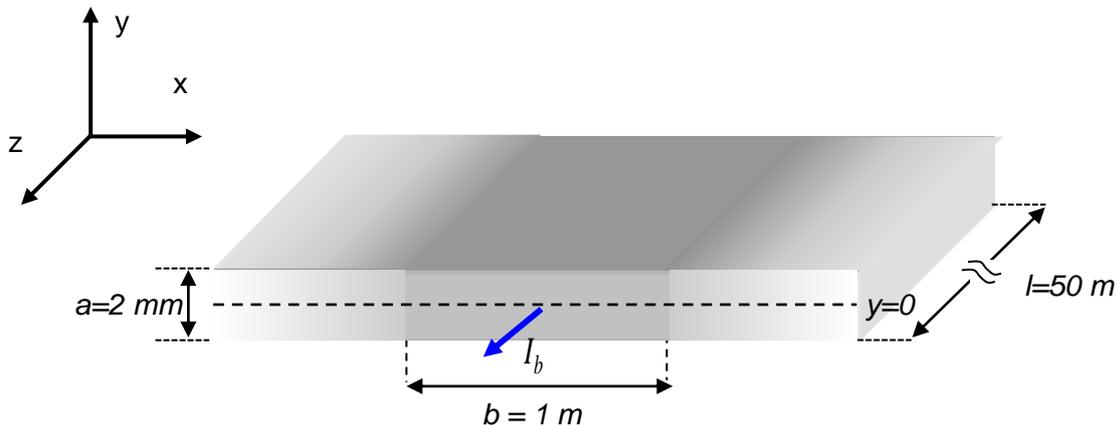


Für die folgenden Aufgaben bzw. Fragen berücksichtigen Sie als Ursache für Magnetfelder nur die Ströme in den langen, parallelen Drähten 1 und 2 und vernachlässigen Sie die Ausdehnung der Stromquelle. Es gelte $\mu_r = 1$ im gesamten Raum.

- Berechnen Sie das durch den Strom I_0 erzeugte magnetische Feld $\vec{H}(x, y)$ in der von der Leiterschleife umschlossenen Fläche an unter der Annahme, dass die Drähte 1 und 2 als unendlich lang angesehen werden können!
- Berechnen Sie den diese Fläche durchsetzenden magnetischen Fluss!
- Berechnen Sie die auf den Drahtbügel wirkende Kraft \vec{F} . Gehen Sie zur Vereinfachung der Rechnung davon aus, dass sich das in Aufgabenteil a berechnete Magnetfeld unverändert am Ort Drahtbügels fortsetzt.
- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Drahtbügel (Masse m) auf und geben Sie den Ort des Drahtbügels in Abhängigkeit von der Zeit in der Form $x(t)$ an (zur Zeit $t = 0$ sei $x = b$)!
- Welche Spannung $u_{\text{ind}}(t)$ wird durch die Bewegung des Drahtbügels in die Leiterschleife induziert?
- Berechnen Sie die elektrische Leistung $p(t)$ in der Stromquelle in Abhängigkeit von der Zeit! Wird die Leistung von der Stromquelle abgegeben oder aufgenommen?

3. Aufgabe

Ein unendlich breites Leiterband aus Kupfer ($\kappa = 57 \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$, $\mu_r = 1$) der Dicke $a = 2 \text{ mm}$ führt einen Gleichstrom in z -Richtung. Der Strom hat eine Amplitude pro Einheitsbreite von: $\frac{I_b}{b} = 200 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ mit $b = 1 \text{ m}$.



Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben bzw. Fragen:

- Berechnen Sie das Magnetfeld innerhalb des Leiterbandes als Funktion des Ortes! Welcher Betrag ergibt sich am unteren bzw. oberen Rand?
- Berechnen Sie für einen Leiterbandabschnitt der Breite b die innere (interne) Induktivität pro Länge $\frac{L_{b,i}}{l}$ und den Widerstand pro Länge $\frac{R_b}{l}$!

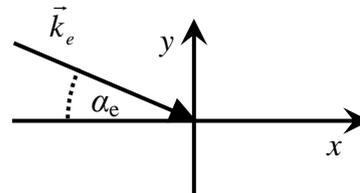
Im Folgenden liege ein Wechselstrom mit der Frequenz $f = 100 \text{ MHz}$ und derselben Amplitude pro Einheitsbreite vor. Der Nullphasenwinkel des Stromes sei null Grad.

- Berechnen Sie in einer geeigneten Näherung die komplexe Amplitude des Magnetfeldes innerhalb des Leiterbandes als Funktion des Ortes! Welcher Betrag ergibt sich am unteren bzw. oberen Rand?
- Berechnen Sie in einer geeigneten Näherung für einen Leiterbandabschnitt der Breite b die innere (interne) Induktivität pro Länge $\frac{L_{b,i}}{l}$ und den Widerstand pro Länge $\frac{R_b}{l}$!

4. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle mit der Frequenz $f = 1$ GHz breitet sich in einem verlustfreien, nicht leitfähigen Medium mit $\epsilon_r = 4$ und $\mu_r = 1$ in der xy -Ebene mit einem Winkel von α_e zwischen null und 90 Grad zur x -Achse aus (siehe Skizze). Die dazugehörige komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke lautet (E_e sei rein reell):

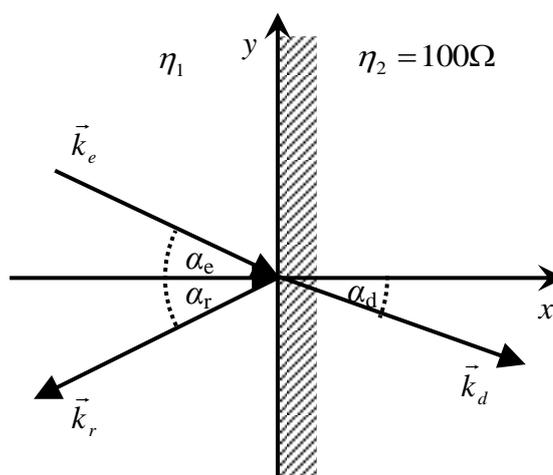
$$\hat{\underline{E}}(\vec{r}) = E_e \cdot \exp(-j \cdot \vec{k}_e \cdot \vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \\ j \end{pmatrix}$$



Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben bzw. Fragen:

- Welche Polarisation der Welle liegt hier vor?
- Geben Sie den Wellenzahlvektor nach Betrag und Richtung an!
- Bestimmen Sie die komplexe Amplitude des Magnetfeldes!
- Bestimmen Sie den komplexen Poynting-Vektor!

Es sei im Folgenden $E_e = 10$ V/m. Die Welle trifft nun unter dem Winkel $\alpha_e = 30^\circ$ auf eine Grenzfläche wie unten dargestellt und wird teilweise gebrochen bzw. reflektiert. Das angrenzende Medium besitzt eine Wellenimpedanz von 100Ω und habe $\mu_r = 1$.



- Geben Sie in Zahlenwerten die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke der reflektierten Welle vollständig an (Wellenzahlvektor und ortsunabhängiger Anteil)!

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichungen in differentieller Form für komplexe Feldamplituden:

$$\operatorname{rot} \underline{\hat{E}} = -j\omega \cdot \underline{\hat{B}} \quad \operatorname{rot} \underline{\hat{H}} = \underline{\hat{J}} + j\omega \cdot \underline{\hat{D}} \quad \operatorname{div} \underline{\hat{D}} = \underline{\hat{\rho}} \quad \operatorname{div} \underline{\hat{B}} = 0$$

- b) Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen (fünf verlangt):

- Lösung der Maxwell-Gleichungen,
- Lösung der Wellengleichung,
- Orte gleicher Phase (Wellenfronten) sind Ebenen im Raum,
- Ausbreitung erfolgt senkrecht zu den Wellenfronten,
- elektrisches Feld und magnetisches Feld stehen senkrecht aufeinander,
- elektrisches und magnetisches Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung,
- elektrisches und magnetisches Feld sind über die Wellenimpedanz verknüpft,
- bewirken einen Energietransport (Leistungsfluss) in Ausbreitungsrichtung.

c) $\underline{r}_E = \frac{\underline{\eta}_2 - \underline{\eta}_1}{\underline{\eta}_2 + \underline{\eta}_1}$

d) $k = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}$

e) $\eta_0 \approx 376,73 \Omega$

- f) Regenbogen entstehen durch Brechung und interne Reflexion des Sonnenlichtes an Regentropfen in der Atmosphäre. Die dabei auftretenden Farben sind ein natürlicher Teil des Spektrums des Sonnenlichtes. Sie werden durch den Effekt der von der Wellenlänge abhängigen Brechung räumlich sichtbar: Für verschiedene Wellenlängen (Frequenzen) weist Wasser leicht unterschiedliche Brechungsindizes auf, was unterschiedliche Eintritts- und Austrittswinkel verursacht.

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Das Magnetfeld in der von der Leiterschleife umschlossenen Fläche ergibt sich gemäß Aufgabenstellung aus den Beiträgen des oberen und unteren Teilstücks. Unter der Annahme, dass die Drähte unendlich lang sind, kann dieses aus dem Ampèreschen Gesetz berechnet werden zu (siehe auch Skript):

$$\vec{H}(x, y) = \vec{H}_{\text{Draht-1}} + \vec{H}_{\text{Draht-2}} = \frac{I_0}{2\pi(a-y)} \cdot \vec{e}_z + \frac{I_0}{2\pi y} \cdot \vec{e}_z$$

- b) Der die Leiterschleife durchsetzende magnetische Fluss ergibt sich aus dem Magnetfeld durch Integration (die Flächennormale wird hier in positive z-Richtung gewählt). Für den Draht 2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \mu_0 \cdot \int_A \vec{H}_{\text{Draht-2}} \cdot d\vec{A} = \int_0^b \int_{d/2}^{a-d/2} \left(\frac{I_0}{2\pi y} \right) dy dx = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \cdot \int_{d/2}^{a-d/2} \left(\frac{1}{y} \right) dy \\ &= \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \cdot [\ln(y) - \ln(a-y)]_{d/2}^{a-d/2} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot (\ln(a-d/2) - \ln(d/2)) \\ &= \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2} \right) \end{aligned}$$

Auf Grund der Symmetrie gilt insgesamt (siehe auch Skript):

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2 \cdot \Phi_2 = \frac{\mu_0 I_0 b}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2} \right)$$

- c) Die auf den Drahtbügel wirkende Lorentzkraft durch den Draht 2 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \mu_0 I_0 \cdot \int d\vec{l} \times \vec{H}_{\text{Draht-2}} = \mu_0 I_0 \cdot \int_{d/2}^{a-d/2} \left(\frac{I_0}{2\pi y} \right) dz \cdot \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \cdot \vec{e}_x \cdot \underbrace{\int_{d/2}^{a-d/2} \left(\frac{1}{y} \right) dz}_{\text{Siehe oben!}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2} \right) \cdot \vec{e}_x \end{aligned}$$

Auf Grund der Symmetrie gilt insgesamt:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2 \cdot \vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_0^2}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2} \right) \cdot \vec{e}_x$$

Die Kraft zeigt wie zu sehen in positive x-Richtung.

- d) Die Lorentzkraft wird zu einer Beschleunigung des Drahtbügels entlang der x-Koordinate führen (Bewegungsgleichung):

$$\underline{\underline{F = F_L = \frac{\mu_0 I_0^2}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2}\right) = m \cdot \ddot{x}}}$$

Da der Drahtbügel zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position $x = b$ ruht, folgt daraus:

$$\underline{\underline{x(t) = b + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_L}{m} \cdot t^2}}$$

- e) Die in die Leiterschleife induzierte Spannung ergibt sich aus der Änderung des die Schleife durchsetzenden magnetischen Flusses. Einsetzen der gegebenen Ortsgleichung in das Ergebnis für den magnetischen Fluss aus Teilaufgabe a ergibt:

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2}\right) \cdot x(t) = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_L}{m} \cdot t^2\right)$$

Daraus:

$$\begin{aligned} u_{\text{ind}}(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2}\right) \cdot \left(\frac{F_L}{m} \cdot t\right) \\ &= -\left[\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2}\right)\right]^2 \cdot I_0^3 \cdot \frac{t}{m} \end{aligned}$$

Die induzierte Spannung fällt entgegengesetzt zur Stromrichtung ab. Dies ergibt sich sowohl aus der Rechnung (unter Berücksichtigung der in Teilaufgabe a) implizit definierten Flächennormalen) als auch aus der physikalischen Anschauung (die induzierte Spannung muss ihrer Ursache entgegenwirken).

- f) Aufgrund der entgegengesetzten Richtungen wird die elektrische Leistung

$$\underline{\underline{p(t) = |I_0 \cdot u_{\text{ind}}(t)| = \left[\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a-d/2}{d/2}\right)\right]^2 \cdot I_0^4 \cdot \frac{t}{m}}}$$

von der Stromquelle abgegeben. Unter den getroffenen Annahmen ist die vom Drahtbügel aufgenommene mechanische Leistung mit dieser identisch.

Lösung zur 3. Aufgabe

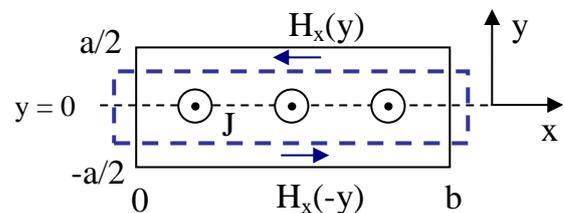
- a) Im Gleichstromfall ergibt sich eine konstante Stromverteilung über die Querschnittsfläche des Leiters in z-Richtung:

$$\vec{J}(x, y, z) = J_0 \cdot \vec{e}_z \quad \text{mit} \quad J_0 = \frac{I_b}{ab} = 100 \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$$

Das magnetische Feld hat gemäß Rechter-Hand-Regel nur eine x-Komponente. Zur Berechnung kann das Ampèresche Gesetz verwendet werden:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad \Rightarrow$$

$$\int_b^0 H_x(y) \cdot dx + \int_0^b H_x(-y) \cdot dx = J_0 \cdot 2by$$



(die Seitenteile tragen aus Symmetriegründen nicht zum Wegintegral bei). Aus Symmetriegründen gilt $H_x(-y) = -H_x(y)$ und damit:

$$-2 \cdot \int_0^b H_x(y) \cdot dx = -2b \cdot H_x(y) = J_0 \cdot 2by$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_x(y) = -J_0 \cdot y = -\frac{I_b}{ab} \cdot y}} \quad (|y| \leq a/2)$$

An den Rändern ergibt sich also ($a = 2 \text{ mm}$):

$$\underline{\underline{|H_x(y = \pm a/2)| = J_0 \cdot \frac{a}{2} = \frac{I_b}{2b} = 100 \frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

- b) Für den normierten Widerstand eines Leiterbandabschnitts ergibt sich:

$$\underline{\underline{\frac{R_b}{l} = \frac{1}{\kappa \cdot ab} = 8,772 \frac{\mu\Omega}{\text{m}}}}$$

Die interne Induktivität pro Länge wird am einfachsten über die magnetische Energie berechnet. Für die Breite b und eine Länge l ergibt sich:

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \cdot \iiint_{\text{Leiter}} \mu \cdot |H_x|^2 dV = \frac{1}{2} \cdot \mu l b \cdot \left(\frac{I_b}{ab}\right)^2 \cdot \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mu l \cdot \frac{I_b^2}{a^2 b} \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{2} \cdot \mu l \cdot \frac{I_b^2}{a^2 b} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{8} = \frac{\mu l}{24} \cdot \frac{a}{b} \cdot I_b^2
\end{aligned}$$

Aus dem Ansatz:

$$\frac{W_m}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L_{b,i}}{l} \cdot I_b^2$$

folgt für einen Leiterbandabschnitt der Breite b die innere Induktivität pro Länge:

$$\underline{\underline{\frac{L_{b,i}}{l} = \frac{\mu}{12} \cdot \frac{a}{b} = 209,4 \frac{\text{pH}}{\text{m}}}}$$

- c) Durch den Skineneffekt fällt die Stromdichte exponentiell vom Leiterrand her in das Innere hinein ab. Aus dem Skript oder aus den Folien zur Vorlesung kann man entnehmen (exakt):

$$\vec{J}(x, y, z) = \hat{J}_z(y) \cdot \vec{e}_z \quad \text{mit} \quad \hat{J}_z(y) = \frac{I_b}{2 \cdot b \cdot d_s} \cdot (1+j) \cdot \frac{\cosh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot y\right)}{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot \frac{a}{2}\right)}$$

Über $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \cdot \vec{H}$ und $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ folgt die magnetische Feldstärke (nur x-Komponente ungleich null) zu:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_x(y) &= \frac{1}{-j\omega\kappa\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \hat{J}_z(y) = j \cdot \frac{1}{\underbrace{\omega\kappa\mu}_{=d_s^2/2}} \cdot \frac{I_b}{2 \cdot b} \cdot \left(\frac{1+j}{d_s}\right)^2 \cdot \frac{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot y\right)}{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot \frac{a}{2}\right)} \\
&= j \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{I_b}{2 \cdot b} \cdot 2j \cdot \frac{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot y\right)}{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot \frac{a}{2}\right)} = \underline{\underline{-\frac{I_b}{2 \cdot b} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot y\right)}{\sinh\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot \frac{a}{2}\right)}} \quad (|y| \leq a/2)
\end{aligned}$$

An den Rändern ergibt sich also wie vorhin (bzw. zu erwarten):

$$\underline{\underline{|\hat{H}_x(y = \pm a/2)| = \frac{I_b}{2b} = 100 \frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

Anmerkung:

Für eine Frequenz von 100 MHz liegt starker Skineneffekt vor, wie sich durch Berechnung der Eindringtiefe leicht überprüfen lässt:

$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = 6,666 \mu\text{m} \ll \frac{a}{2} = 1 \text{ mm}$$

Man könnte somit genähert annehmen, dass sich eine Stromdichteverteilung wie im halbumendlichen Raum ergibt (jeweils vom unteren bzw. oberen Rand aus betrachtet). Im Folgenden sei s der Abstand von einem Rand – es gilt dann (siehe Folien):

$$\hat{j}_z(y) \approx \frac{1+j}{d_s} \cdot \frac{I_b}{2b} \cdot \exp\left(-\frac{1+j}{d_s} \cdot s\right) = \underline{J}_0 \cdot \exp\left(-\frac{1+j}{d_s} \cdot s\right)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich aus der Tatsache, dass das Leiterband gesamt den Strom I_b / b führt. Die Feldstärke an der Oberfläche ergibt sich dann über (siehe z.B. Folien):

$$|\underline{H}_0| = \left| \frac{d_s}{1+j} \cdot \underline{J}_0 \right| = \frac{I_b}{2b} \approx |\hat{H}_x(y = \pm a/2)|$$

- d) Die interne Induktivität und der Widerstand pro Länge ergeben sich am einfachsten aus der Impedanz pro Länge. Aus dem Skript oder aus den Folien zur Vorlesung kann man entnehmen (exakt):

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}}{l} = \frac{(1+j)}{2 \cdot \kappa \cdot b \cdot d_s} \cdot \coth\left(\frac{1+j}{d_s} \cdot \frac{a}{2}\right)$$

Genähert für starken Skineneffekt (Begründung siehe oben):

$$\underline{Z}' \approx \frac{(1+j)}{2 \cdot \kappa \cdot b \cdot d_s}$$

Daraus:

$$\underline{\underline{\frac{R_b}{l} = \text{Re}[\underline{Z}'] = 1,315 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\frac{L_{b,i}}{l} = L' = \frac{\text{Im}[\underline{Z}']}{\omega} = 2,093 \frac{\text{pH}}{\text{m}}}}$$

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Man kann sich die Welle zusammengesetzt denken aus einer linear polarisierten Welle mit Feldstärkevektor in der xy-Ebene und einer linear polarisierten Welle mit Feldstärkevektor senkrecht zur xy-Ebene (parallel zur z-Achse):

$$\hat{\underline{E}}(\vec{r}) = E_e \cdot \exp(-j \cdot \vec{k}_e \cdot \vec{r}) \cdot \left[\begin{pmatrix} \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \right]$$

Beide zeigen haben denselben Betrag, weisen aber eine 90°-Phasenverschiebung auf. Somit findet man eine:

zirkulare Polarisation.

- b) Der Betrag des Wellenzahlvektors in einem verlustfreien und nicht leitfähigem Medium berechnet sich zu

$$k_e = |\vec{k}_e| = \frac{\omega}{c_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \frac{2\pi \cdot 10^9}{2,998 \cdot 10^8} \cdot 2 \text{ m}^{-1} = \underline{\underline{41,92 \text{ m}^{-1}}}$$

Dabei ist c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (exakt = 299 792 458 m/s). Die Richtung des Wellenzahlvektors ergibt sich aus den Winkelfunktionen des Einfallswinkels α_e :

$$\underline{\underline{\vec{k}_e}} = k_e \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_e) \\ -\sin(\alpha_e) \\ 0 \end{pmatrix} = k_e \cdot \underline{\underline{\vec{e}_k}}$$

Anmerkung: Die Wellenlänge ist $\lambda = 2\pi / k_e = 0,1499 \text{ m}$.

- c) Das Magnetfeld lässt sich z.B. bestimmen über:

$$\underline{\underline{\hat{H}}} = \frac{1}{\eta} \cdot \underline{\underline{\vec{e}_k}} \times \underline{\underline{\hat{E}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \cdot \underline{\underline{\vec{e}_k}} \times \underline{\underline{\hat{E}}} = \frac{2}{\eta_0} \cdot \underline{\underline{\vec{e}_k}} \times \underline{\underline{\hat{E}}}$$

η ist hierbei die Wellenimpedanz des Mediums und η_0 die des freien Raumes.

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{2}{\eta_0} \cdot E_e \cdot \exp(-j \cdot \vec{k}_e \cdot \vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_e) \\ -\sin(\alpha_e) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \\ j \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\eta_0} \cdot E_e \cdot \exp(-j \cdot \vec{k}_e \cdot \vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} -j \sin(\alpha_e) \\ -j \cos(\alpha_e) \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d) Der komplexe Poynting-Vektor ergibt sich aus dem Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{2} \cdot \hat{\underline{E}} \times \hat{\underline{H}}^* = \frac{1}{2} \cdot E_e \cdot \frac{2}{\eta_0} \cdot E_e \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \\ j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -j \sin(\alpha_e) \\ -j \cos(\alpha_e) \\ 1 \end{pmatrix}^* \\ &= \frac{E_e^2}{\eta_0} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \\ j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j \sin(\alpha_e) \\ j \cos(\alpha_e) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{E_e^2}{\eta_0} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(\alpha_e) \\ -2 \cdot \sin(\alpha_e) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{2 \cdot \frac{E_e^2}{\eta_0} \cdot \vec{e}_k}} = \underline{\underline{\frac{E_e^2}{\eta} \cdot \vec{e}_k}}\end{aligned}$$

Der Poynting-Vektor zeigt in Richtung des Wellenzahlvektors. Wie in Teilaufgabe c ist η hierbei die Wellenimpedanz des Mediums und η_0 die des freien Raumes.

e) Zur vollständigen Berechnung der reflektierten elektrischen Welle werden sowohl deren Ausbreitungsrichtung und –geschwindigkeit (Wellenzahlvektor) als auch der ortsunabhängige Anteile der komplexen Amplitude benötigt. Für den Betrag des Wellenzahlvektors gilt:

$$|\vec{k}_r| = |\vec{k}_e| = 2 \cdot \frac{\omega}{c_0} = \underline{\underline{41,92 \text{ m}^{-1}}}$$

Aus dem Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel, $\alpha_r = \alpha_e = 30^\circ$) folgt:

$$\underline{\underline{\vec{k}_r = k_r \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\alpha_e) \\ -\sin(\alpha_e) \\ 0 \end{pmatrix} = k_r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Die x-Komponente des Wellenzahlvektors wechselt das Vorzeichen.

Für die Berechnung des ortsunabhängigen Teils der komplexen Amplitude der reflektierten Welle werden die Fresnelschen Gleichungen verwendet. Zuvor muss jedoch der Durchtrittswinkel aus dem Brechungsgesetz bestimmt werden. Wegen allgemein $\underline{k} = \mu_0 \mu_r \omega / \underline{\eta}$ und $\mu_r = 1$ in beiden Medien lautet dieses hier:

$$\frac{\sin(\alpha_e)}{\eta_1} = \frac{\sin(\alpha_d)}{\eta_2} \quad \text{mit} \quad \eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{376,73 \Omega}{2} = 188,37 \Omega \quad \text{und} \quad \eta_2 = 100 \Omega$$

Mit $\sin(\alpha_e) = 0,5$ ergibt sich:

$$\alpha_d = \arcsin\left(\frac{\eta_2}{2 \cdot \eta_1}\right) = \underline{\underline{15,39^\circ}}$$

Zur Anwendung der Fresnelschen Gleichungen müssen die Komponenten gemäß ihrer Polarisation (Ausrichtung in Bezug auf die Einfallsebene = xy-Ebene) behandelt werden.

Komponente senkrecht zur Einfallsebene (Fall 1 im Skript):

$$r_{\perp} = r_E = \frac{\eta_2 \cdot \cos(\alpha_e) - \eta_1 \cdot \cos(\alpha_d)}{\eta_2 \cdot \cos(\alpha_e) + \eta_1 \cdot \cos(\alpha_d)} = \frac{100 \cdot 0,866 - 188,37 \cdot 0,9643}{100 \cdot 0,866 + 188,37 \cdot 0,9643} = -0,3542$$

Komponente parallel zur Einfallsebene (Fall 2 im Skript):

$$r_{\parallel} = r_H = \frac{\eta_1 \cdot \cos(\alpha_e) - \eta_2 \cdot \cos(\alpha_d)}{\eta_1 \cdot \cos(\alpha_e) + \eta_2 \cdot \cos(\alpha_d)} = \frac{188,37 \cdot 0,866 - 100 \cdot 0,9643}{188,37 \cdot 0,866 + 100 \cdot 0,9643} = 0,2571$$

Diese Reflexionsfaktoren müssen gemäß der im Skript vorgegebenen Ausrichtung der reflektierten Wellen hier angewendet werden. Zunächst gilt für die einfallende Welle:

$$\underline{\vec{E}}_{0e} = E_e \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \\ j \end{pmatrix} = 10 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,866 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8,66 \\ 10j \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Damit für die reflektierte Welle:

$$\underline{\vec{E}}_{0r} = \begin{pmatrix} r_{\parallel} \cdot 5 \\ r_{\parallel} \cdot 8,66 \\ r_{\perp} \cdot 10j \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \begin{pmatrix} 0,2486 \cdot 5 \\ 0,2486 \cdot 8,66 \\ -0,3543 \cdot 10j \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1,243 \\ 2,153 \\ -3,543j \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	9	9	6	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 14. 8. 2014 – 9:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

- Hinweise:**
- 1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen.
Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!
- 2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“:** Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.
- Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.
- Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

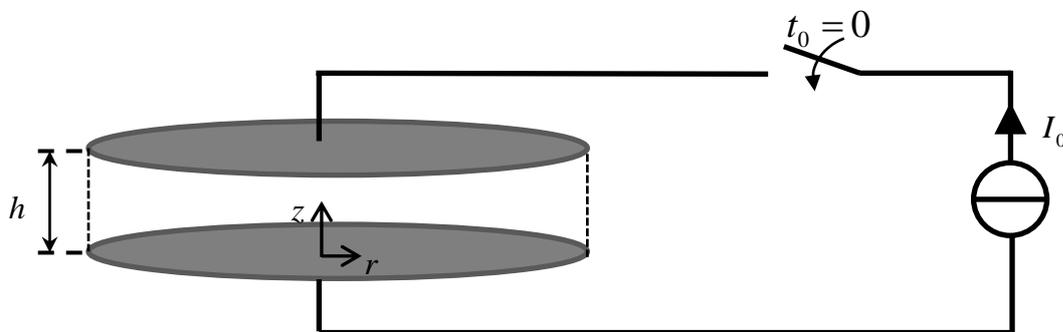
- a) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form?
- b) Wie groß ist die innere Induktivität pro Länge eines runden, von Gleichstrom durchflossenen Leiters (Zahlenwert +/- 5 %)?
- c) Wie lautet die Formel für die sogenannte Oberflächenimpedanz eines Körpers im Fall des starken Skin-effektes?
- d) Was besagt die Lenz'sche Regel (in Worten)?
- e) Wie lautet die Formel für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum?
- f) Gegeben sei ein luftgefüllter Rechteckhohleiter mit den Innenabmessungen 15 cm x 10 cm. Bei welcher kleinsten Frequenz wird eine Mode dieses Wellenleiters ausbreitungsfähig (Zahlenwert +/- 5%)?

Vor- und Zuname:

Matrikel-Nr.:

2. Aufgabe

Gegeben sei der skizzierte kreiszylindrische Plattenkondensator mit Radius R bzw. Fläche A . Der Kondensator sei zunächst energie- und ladungsfrei. Der Raum zwischen den ideal leitenden Platten sei mit einem Dielektrikum mit $\epsilon_r = 4$ und $\mu_r = 1$ gefüllt. Es gelte $R \gg h$. Rand- und Verzögerungseffekte sind im Folgenden zu vernachlässigen.

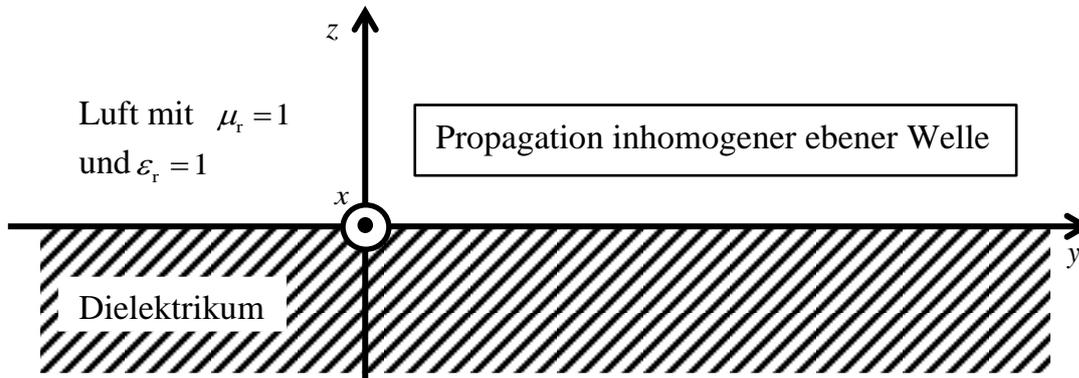


Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird die angeschlossene Konstantstromquelle mit dem Strom I_0 eingeschaltet und der Kondensator geladen. Bearbeiten Sie dazu folgende Aufgaben bzw. Fragen:

- Berechnen Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}(r,t)$ zwischen den Platten des Kondensators als Funktion des Ortes und der Zeit ($0 \leq r \leq R$, $t \geq 0$)!
- Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}(r,t)$ zwischen den Platten des Kondensators als Funktion des Ortes und der Zeit ($0 \leq r \leq R$, $t \geq 0$)!
- Skizzieren Sie die Beträge von $\vec{D}(r,t)$ und $\vec{H}(r,t)$ für einen Zeitpunkt $t_1 > t_0$ als Funktion des Abstandes im Bereich $0 \leq r \leq R$!
- Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}(r,t)$ im Dielektrikum zwischen den Platten als Funktion des Ortes und der Zeit ($0 \leq r \leq R$, $t \geq 0$)!
- Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des gesamten Leistungsflusses P in den Kondensator hinein für $t > 0$ unter Verwendung von \vec{S} ! Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der elektrischen Energie für $t > 0$ im Kondensator!

3. Aufgabe

Entlang einer dielektrischen Grenzfläche, welche sich bei $z = 0$ befindet, propagiert in Luft (Materialparameter $\mu_r = 1$ und $\varepsilon_r = 1$) oberhalb der Grenzfläche ($z \geq 0$) eine inhomogene ebene elektromagnetische Welle gemäß folgender Skizze:



Die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke ist gegeben durch ($z \geq 0$):

$$\hat{\underline{E}} = E_0 \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{k} = k_0 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -j \cdot 5 \end{pmatrix}, k_0 = 100 \text{ m}^{-1} \text{ sowie } E_0 = 10 \text{ V/m}.$$

Bearbeiten Sie folgenden Aufgaben bzw. Fragen:

- In welche Richtung breitet sich die Welle aus?
- Bestimmen Sie als Zahlenwert (in Hz) die Frequenz der Welle!
- Bestimmen Sie als Zahlenwert (in m/s), mit welcher Phasengeschwindigkeit die Welle in der Ausbreitungsrichtung propagiert!
- Berechnen Sie den Betrag der komplexen elektrischen Feldstärke und bestimmen Sie die Orte $z \geq 0$, wo dieser maximal wird!
- Berechnen Sie zur vorgegebenen komplexen Amplitude des elektrischen Feldes die entsprechende des magnetische Feldes!
- Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor!

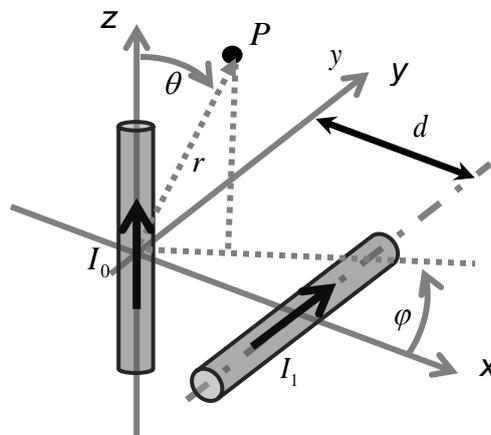
Hinweis: Für alle Zahlenwerte genügen vier signifikante Stellen, also z.B. $1,234 \cdot 10^5$, wobei die letzte Ziffer (hier die 4) gerundet sein soll.

4. Aufgabe

Im freien Raum ist die komplexe Amplitude des gesamten magnetischen Fernfeldes zweier Hertzscher Dipole im Abstand d mit jeweils harmonischer Anregung wie folgt gegeben (in Kugelkoordinaten):

$$\hat{\underline{H}}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} \cdot \left[\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\theta \cdot e^{+jk \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot d} \cdot e^{+j\xi} + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi \right]$$

Hierbei ist I_0 ein konstanter Strom größer 0, k die Freiraumwellenzahl und ξ ein (reeller) Phasenwert.



Bearbeiten Sie folgenden Aufgaben bzw. Fragen:

- a) Beurteilen Sie an Hand des gegebenen Magnetfeldes, welche Polarisation (zirkular, linear, elliptisch) jeweils in den folgenden Strahlungsrichtungen (φ, θ) mit den angegebenen Werten für den Abstand d zwischen den Dipolen und den Phasenverschiebungen der Anregungen ξ vorliegt! Es sei $\lambda = 2\pi/k$.

- I. $\varphi = 0, \theta = 90^\circ, d = 0, \xi = 45^\circ$
- II. $\varphi = 0, \theta = 90^\circ, d = \lambda/2, \xi = 180^\circ$
- III. $\varphi = 0, \theta = 90^\circ, d = \lambda/2, \xi = -90^\circ$
- IV. $\varphi = 90^\circ, \theta = 90^\circ, d = \lambda/2, \xi = 0$

- b) Bestimmen Sie die komplexe Amplitude der zugehörigen elektrischen Feldstärke in Fernfeldnäherung in Abhängigkeit der gegebenen Größen!
- c) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor für $\varphi = 45^\circ, \theta = 45^\circ$ und $d = \lambda$! Für welches ξ wird der Betrag des Poynting-Vektors maximal?

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichungen in differentieller Form:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- b) Innere (interne) Gleichstrominduktivität eines runden Leiters pro Länge:

$$\frac{\mu_0 \mu_r}{8\pi} = 0,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} = 50 \frac{\text{nH}}{\text{m}} = 5 \frac{\mu\text{H}}{\text{cm}} \quad (\mu_r = 1)$$

- c) Oberflächenimpedanz: $\underline{Z}_s = \frac{1+j}{\kappa d} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}$

- c) Die Lenz'sche Regel macht eine Aussage über die Richtung (Polarität) einer durch Induktion erzeugten elektrischen Spannung. Für eine Leiterschleife kann diese wie folgt formuliert werden: Durch eine Änderung des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife wird eine Spannung immer so induziert, dass der dadurch fließende Strom ein Magnetfeld erzeugt, welches der ursprünglichen Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

- d) Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

- e) Die Grenzfrequenz der TE₁₀-Mode ist $f = c_0/2a$ mit a = Länge der breiten Seite (hier 15 cm). Somit folgt $f \approx 1$ GHz.

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Bei Vernachlässigung von Rand- und Verzögerungseffekten ist die elektrische Flussdichte lediglich zwischen den Platten ungleich null und gleichzeitig räumlich konstant. Aus der Stromflussrichtung lässt sich folgern, dass sie in negative z -Richtung zeigen muss. Der zeitliche Verlauf folgt aus dem Gaußschen Gesetz angewendet auf z.B. die obere Kondensatorplatte:

$$-D_z(r,t) \cdot A = Q(t) = \int_0^t I_0(\tau) d\tau = I_0 \cdot t$$

Die Fläche der Kondensatorplatte ist hierbei $A = \pi R^2$. Somit für $0 \leq r \leq R$, $t \geq 0$:

$$\underline{\underline{\vec{D}(r,t) = -\frac{I_0}{A} \cdot t \cdot \vec{e}_z}}$$

- b) Die magnetische Feldstärke umkreist innerhalb der Kondensators die Verschiebungsstromdichte $\dot{\vec{D}} = -I_0 / A \cdot \vec{e}_z$. Sie hat lediglich eine azimutale Komponente. Unter Ausnutzung der Zylindersymmetrie folgt mit dem Ampèreschen Gesetz:

$$\oint \vec{H}(r,t) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} H_\varphi(r,t) \cdot r d\varphi = 2\pi r \cdot H_\varphi(r,t) = \iint \dot{\vec{D}}(r,t) \cdot d\vec{A} = -\frac{I_0}{A} \cdot \pi r^2$$

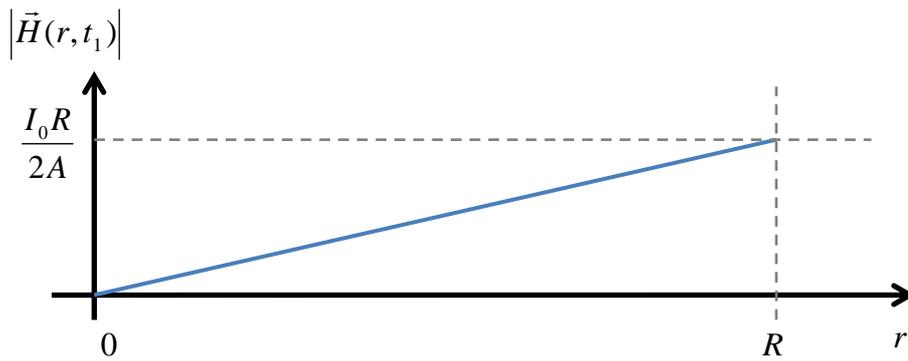
Somit für $0 \leq r \leq R$, $t \geq 0$:

$$\underline{\underline{\vec{H}(r,t) = \vec{H}(r) = -\frac{I_0}{2A} \cdot r \cdot \vec{e}_\varphi}}$$

Die magnetische Feldstärke ist während des Ladens unabhängig von der Zeit und wächst linear mit dem Abstand von der Achse des Kondensators, ganz wie im Fall eines von Gleichstrom durchflossenen Drahtes.

- c) Skizzen für einen Zeitpunkt $t_1 > t_0$:

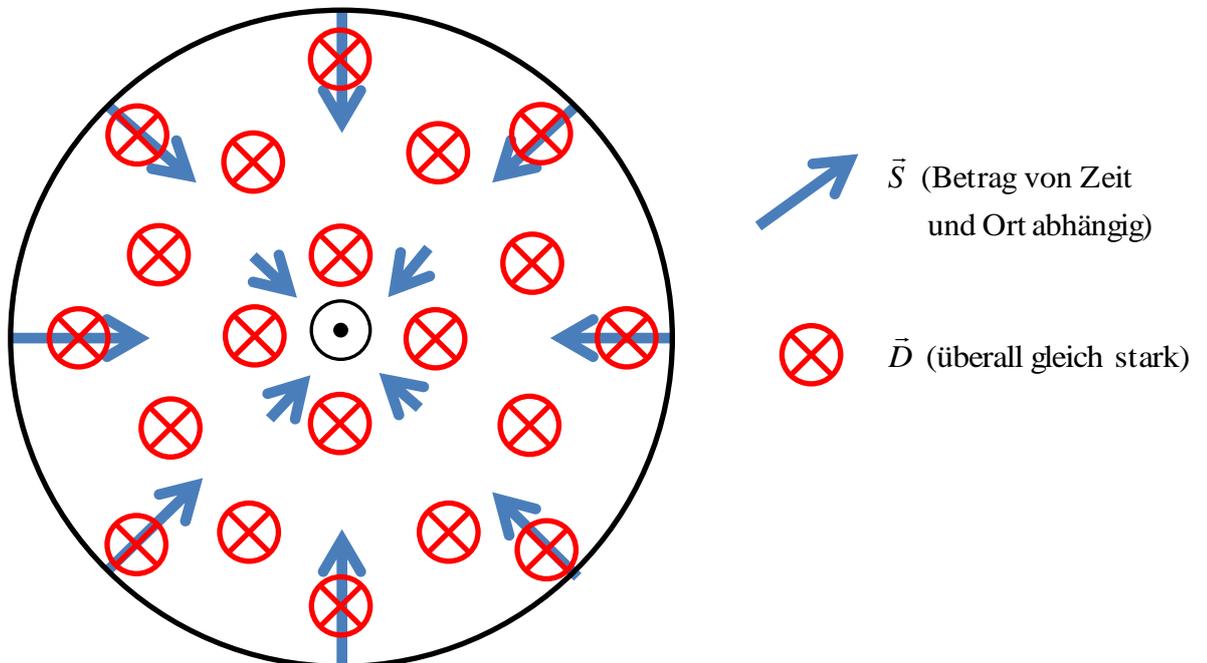




- d) Der Poynting-Vektor im Dielektrikum zwischen den Platten lässt sich mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a und b leicht ermitteln. Für $0 \leq r \leq R$, $t \geq 0$:

$$\vec{S}(r, t) = \vec{E}(r, t) \times \vec{H}(r, t) = \left(-\frac{I_0}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \cdot t \cdot \vec{e}_z \right) \times \left(-\frac{I_0}{2A} \cdot r \cdot \vec{e}_\varphi \right) = \underline{\underline{-\frac{I_0^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r A^2} \cdot r \cdot t \cdot \vec{e}_r}}$$

$\vec{S}(r, t)$ ist in radialer Richtung in den Kondensator hinein gerichtet – die Energie fließt in den Kondensator hinein. Skizze (nicht verlangt):



- e) Der gesamte mit dem Poynting-Vektor verknüpfte Leistungsfluss in den Kondensator hinein ist gegeben über ($t > 0$):

$$P(t) = \iint_{\text{Mantelfläche}} \vec{S}(R,t) \cdot d\vec{A} = 2\pi R h \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{S}(R,t)$$

Mit $A = \pi R^2$ und dem Ergebnis aus Teilaufgabe d folgt ($t > 0$):

$$P(t) = 2\pi R h \cdot \left(-\frac{I_0^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r A^2} \cdot R \cdot t \right) = \underline{\underline{-\frac{I_0^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \cdot t}}$$

Die Leistung fließt in den Kondensator hinein und ist deshalb negativ. Die dadurch aufgenommene Energie ist ($t > 0$):

$$W(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau = \int_0^t -\frac{I_0^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \cdot \tau d\tau = -\frac{1}{2} \cdot \frac{I_0^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \cdot t^2$$

Für die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der im Kondensator gespeicherten, elektrischen Energie wird zunächst der Verlauf der elektrischen Energiedichte ermittelt ($t > 0$):

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot |\vec{E}(t)|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A^2} \cdot t^2$$

Hieraus ($t > 0$):

$$W_e(t) = \iiint_{\text{Kondensatorvolumen}} w_e(t) dV = Ah \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A^2} \cdot t^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{I_0^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \cdot t^2}}$$

Dies passt zur Berechnung über den Poynting-Vektor (der Kondensator speichert die ihm zufließende elektromagnetische Leistung im elektrischen Feld).

Anmerkung:

Diese Rechnung vernachlässigt die magnetische Energiedichte. Für $t > 0$:

$$w_m(t) = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} \cdot |\vec{H}(t)|^2 = \frac{I_0^2 r^2}{8\mu_0 A^2}$$

Diese ist während des Stromflusses konstant. Sie wurde zu Beginn des Stromflusses instantan aufgebaut und erscheint deshalb nicht in der Berechnung mittels des Poynting-Vektors. Würde die Stromquelle wieder abgetrennt, verschwindet sie sofort wieder und die Verhältnisse sind wie aus der Elektrostatik vermutet.

Lösung zur 3. Aufgabe

Wie angegeben handelt es sich um eine inhomogene ebene Welle, d.h. Fronten gleicher Phase fallen nicht zusammen mit Fronten gleicher Amplitude. Dies ist leicht zu sehen, wenn man die elektrische Feldstärke ausschreibt:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}} &= E_0 \cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y = E_0 \cdot e^{-j\cdot 10\cdot k_0 \cdot x} \cdot e^{-5\cdot k_0 \cdot z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y \\ &= \underbrace{E_0 \cdot e^{-5\cdot k_0 \cdot z}}_{\substack{\text{in z-Richtung} \\ \text{abfallend}}} \cdot \underbrace{e^{-j\cdot 10\cdot k_0 \cdot x}}_{\substack{\text{in x-Richtung} \\ \text{ausbreitend}}} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

a) Wegen:

$$\operatorname{Re}[\underline{\vec{k}}] = \operatorname{Re} \left[k_0 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -j \cdot 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 10 \cdot k_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Breitet sich die Welle in positiver x-Richtung aus.

b) Für den Wellenzahlvektor muss die Dispersionsrelation (Materialparameter $\mu_r = 1$ und $\varepsilon_r = 1$):

$$\underline{\vec{k}}^2 = (10 \cdot k_0)^2 + (-j \cdot 5 \cdot k_0)^2 = 75 \cdot k_0^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

mit $k_0 = 100 \text{ m}^{-1}$ gelten. Es folgt:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{75} \cdot k_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{\sqrt{75}}{2\pi} \cdot c_0 \cdot k_0 = 1,378 \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 100 \frac{1}{\text{m}} = \underline{\underline{4,131 \cdot 10^{10} \text{ Hz}}}$$

c) Die Phasengeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung kann z.B. aus der Betrachtung des komplexen Argumentes der Exponentialfunktion $j(\omega t - 10 \cdot k_0 \cdot x)$ gewonnen werden:

$$v_{\text{ph},x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{10 \cdot k_0} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{75} \cdot c_0 \cdot k_0}{2\pi \cdot 10 \cdot k_0} = 0,866 \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{2,596 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Die inhomogene Welle breitet sich also langsamer aus als eine vergleichbare homogene Welle.

d) Der Betrag der komplexen elektrischen Feldstärke lautet ($z \geq 0$):

$$\left| \hat{\underline{E}} \right| = \sqrt{\hat{\underline{E}} \cdot \hat{\underline{E}}^*} = \sqrt{E_0 \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot E_0 \cdot e^{+j\vec{k} \cdot \vec{r}}} = E_0 \cdot \sqrt{e^{-5 \cdot k_0 \cdot z} \cdot e^{-5 \cdot k_0 \cdot z}} = \underline{\underline{E_0 \cdot e^{-5 \cdot k_0 \cdot z}}}$$

Es ist leicht zu erkennen, dass dieser für $z = 0$ maximal wird.

e) Die komplexe Amplitude des magnetischen Feldes folgt z.B. aus $\text{rot } \hat{\underline{E}} = -j\omega\mu_0 \cdot \hat{\underline{H}}$ bzw. $\hat{\underline{H}} = \text{rot } \hat{\underline{E}} / -j\omega\mu_0$. Für den Rotationsoperator

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{gilt hier} \quad \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial y} = \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial x} = \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} = 0.$$

Es folgt:

$$\hat{H}_x = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \frac{-\partial \hat{E}_y}{\partial z} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (E_0 \cdot e^{-j \cdot 10 k_0 \cdot x} \cdot e^{-5 \cdot k_0 \cdot z}) = \underline{\underline{\frac{j \cdot 5 \cdot k_0}{\omega\mu_0} \cdot E_0 \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}}}$$

$$\underline{\underline{\hat{H}_y = 0}}$$

$$\hat{H}_z = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (E_0 \cdot e^{-j \cdot 10 k_0 \cdot x} \cdot e^{-5 \cdot k_0 \cdot z}) = \underline{\underline{\frac{10 \cdot k_0}{\omega\mu_0} \cdot E_0 \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}}}$$

f) Der komplexe Poynting-Vektor folgt mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe e zu:

$$\underline{\underline{\vec{S}}} = \frac{1}{2} \hat{\underline{E}} \times \hat{\underline{H}}^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \hat{E}_y \hat{H}_z^* - \hat{E}_z \hat{H}_y^* \\ \hat{E}_z \hat{H}_x^* - \hat{E}_x \hat{H}_z^* \\ \hat{E}_x \hat{H}_y^* - \hat{E}_y \hat{H}_x^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \hat{E}_y \hat{H}_z^* \\ 0 \\ -\hat{E}_y \hat{H}_x^* \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{k_0}{\omega\mu_0} \cdot E_0^2 \cdot e^{-10 \cdot k_0 \cdot z} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ j \cdot 5 \end{pmatrix}}}}$$

Wie zu sehen ist er rein reell in x-Richtung und rein imaginär in z-Richtung, d.h. Wirkleistung wird nur in x-Richtung transportiert.

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Einsetzen der Strahlungsrichtungen und Dipolabstände in die Formel für das Magnetfeld

$$\underline{\hat{H}}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\theta \cdot e^{+jk \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot d} \cdot e^{+j\xi} + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi]$$

ergibt:

I.
$$\underline{\hat{H}}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} (1 \cdot \vec{e}_\theta \cdot e^{+j\pi/4} + 1 \cdot \vec{e}_\varphi)$$

Die Phasenverschiebung zwischen den gleich großen Komponenten ist $\pi/4$, die Polarisation damit elliptisch.

II.
$$\underline{\hat{H}}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} (1 \cdot \vec{e}_\theta \cdot e^{+j\pi} \cdot e^{+j\pi} + 1 \cdot \vec{e}_\varphi)$$

Die Phasenverschiebung zwischen den gleich großen Komponenten ist 2π bzw. 0, die Polarisation damit linear.

III.
$$\underline{\hat{H}}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} (1 \cdot \vec{e}_\theta \cdot e^{+j\pi} \cdot e^{-j\pi/2} + 1 \cdot \vec{e}_\varphi)$$

Die Phasenverschiebung zwischen den gleich großen Komponenten ist $\pi/2$, die Polarisation damit zirkular.

IV.
$$\underline{\hat{H}}(r, \theta, \varphi) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} (0 + 1 \cdot \vec{e}_\varphi)$$

Da es hier nur eine Komponente gibt, ist die Polarisation linear.

- b) Für ebene Wellen im Freiraum gilt die Formel:

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \eta_0 \cdot \underline{\vec{H}}(\vec{r}, t) \times \vec{e}_k \quad \text{mit} \quad \eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

Das vorliegende Magnetfeld besteht aus zwei Anteilen (Komponenten), wobei jeder auf einen Dipol zurückgeht. Das Fernfeld eines jeden Dipols verhält sich lokal genähert wie eine ebene Welle, woraus das individuelle elektrische Feld berechnet werden kann. Nach Überlagerung ergibt sich mit $\vec{e}_k = \vec{e}_r$:

$$\underline{\underline{\underline{\hat{E}}(r, \theta, \varphi) = \eta_0 \cdot \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} \cdot [-\cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \cdot e^{+jk \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot d} \cdot e^{+j\xi} + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\theta]}}$$

- c) Der komplexe Poynting-Vektor ist allgemein gegeben über: $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{E}} \times \underline{\hat{H}}^*$

Hier gilt $\varphi = 45^\circ$, $\theta = 45^\circ$ und $d = \lambda$. Somit:

$$\hat{\underline{H}}^*(r, 45^\circ, 45^\circ) = \frac{I_0}{r} \cdot e^{+jk \cdot r} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_\theta \cdot e^{-j\pi} \cdot e^{-j\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_\varphi \right]$$

$$\hat{\underline{E}}(r, 45^\circ, 45^\circ) = \eta_0 \cdot \frac{I_0}{r} \cdot e^{-jk \cdot r} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_\varphi \cdot e^{+j\pi} e^{+j\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_\theta \right]$$

Es ergibt sich also:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \hat{\underline{E}} \times \hat{\underline{H}}^* = \frac{1}{2} \cdot \eta_0 \cdot \frac{I_0^2}{r^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_r \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \eta_0 \cdot \frac{I_0^2}{r^2} \cdot \vec{e}_r}}$$

Das Ergebnis hängt nicht von ξ ab, der Betrag des Poynting-Vektors ist also für alle ξ gleich (maximal).

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	5	9	10	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 13. 3. 2015 – 11:30 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

- Hinweise:**
- 1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen.
Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!
- 2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“:** Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.
- Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.
- Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

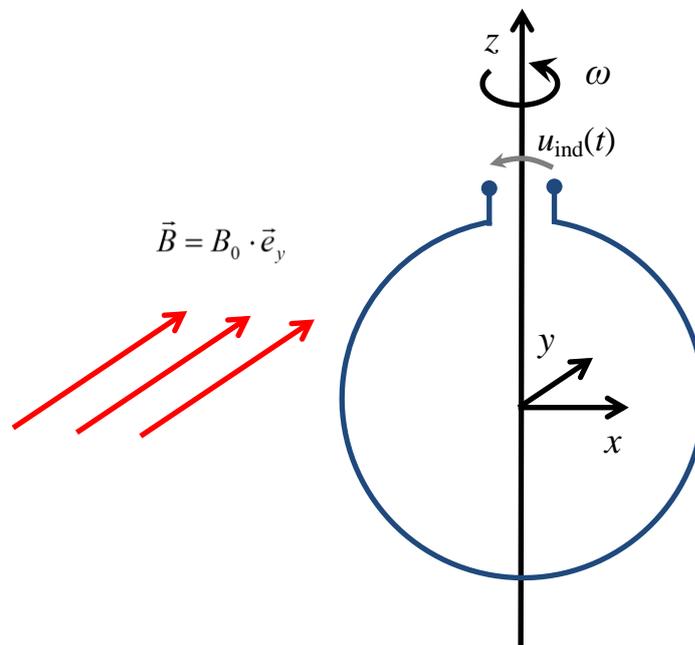
1. Aufgabe

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie lautet die Formel für die durch Bewegung durch ein Magnetfeld induzierte elektrische Feldstärke in einem Leiterstück?
- b) Wie lautet die Formel für die Skintiefe (Eindringtiefe) eines zeitlich harmonischen elektromagnetischen Feldes in einem leitfähigen Material?
- c) Für welchen Frequenzbereich ist die Skineffekt-Näherung gültig bzw. wie hängt dieser von den Materialparametern ab (Formel)?
- d) Wie lautet die Formel für die Phasengeschwindigkeit eines zeitlich harmonischen elektromagnetischen Feldes in einem verlustlosen Material?
- e) Beschreiben Sie in Worten, was man unter einer Einfallsebene versteht!
- f) Wie lautet die so genannte Fernfeldbedingung (Formel) für eine elektrisch kleine Antenne?

2. Aufgabe

Ein kreisförmige Leiterschleife mit Radius R rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse in einem senkrecht zur Drehachse homogenen Magnetfeld wie unten dargestellt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Kreisring in der xz -Ebene. Der Abstand der Klemmen ist im Folgenden zu vernachlässigen.



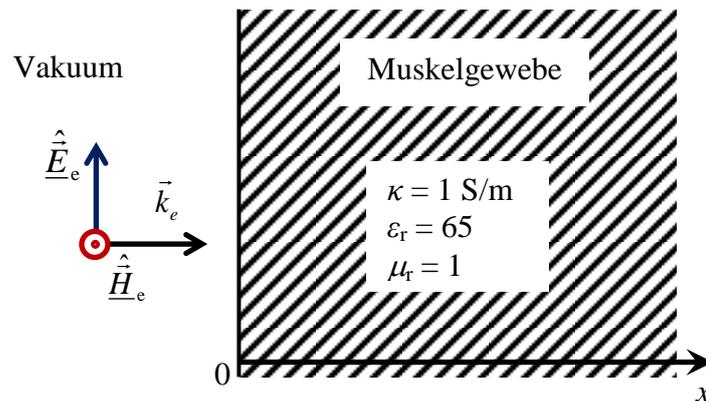
Bearbeiten Sie hierzu folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Spannung $u_{\text{ind}}(t)$ als Funktion der Zeit vorzeichenrichtig (siehe Skizze) über den magnetischen Fluss!
- Bestimmen Sie alternativ die induzierte Spannung $u_{\text{ind}}(t)$ als Funktion der Zeit vorzeichenrichtig (siehe Skizze) über:

$$u_{\text{ind}}(t) = \int_{\text{Ring}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

3. Aufgabe

Gegeben ist eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum mit der Kreisfrequenz $\omega = 10^7$ rad/s und einem Realteil des Poynting-Vektors (zeitlich gemittelte Strahlungsdichte) von $S_m = 100$ W/m². Die Welle läuft senkrecht auf die ebene Grenzfläche zu einem halbumendlichen, muskelähnlichen Material zu und wird reflektiert bzw. transmittiert:

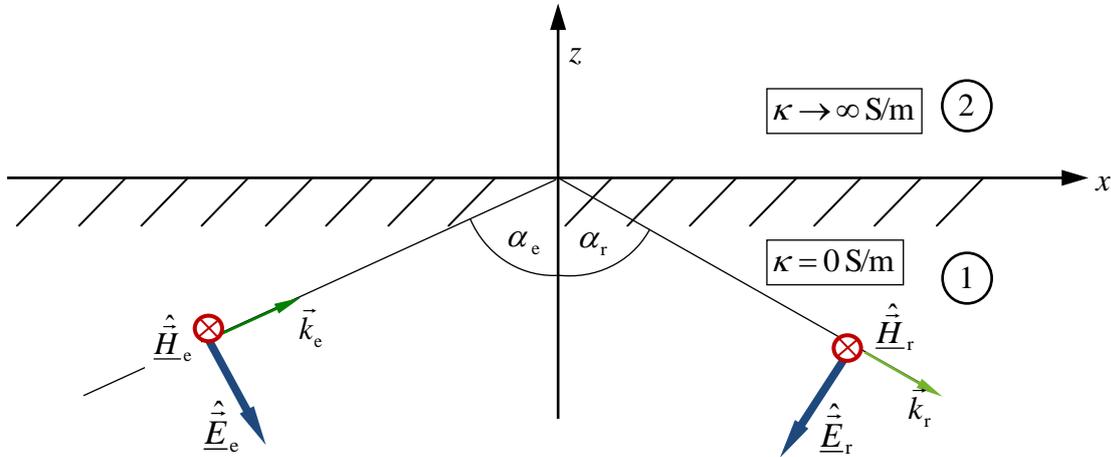


Berechnen Sie hierzu folgende Größen als Zahlenwerte mit vier signifikanten Stellen:

- $|\hat{E}_e|$, $|\hat{H}_e|$ und $|\vec{k}_e|$ der einfallenden Welle,
- die Beträge der komplexen Amplitude der transmittierten elektrischen Feldstärke und transmittierten magnetischen Feldstärke bei $x = 0$,
- die Beträge der komplexen Amplitude der transmittierten elektrischen Feldstärke und transmittierten magnetischen Feldstärke bei $x = 10$ cm,
- den Betrag des komplexen Poynting-Vektors bei $x = 0$ und $x = 10$ cm,
- die dissipierte Leistungsdichte $p = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{J}} \cdot \underline{\hat{E}}$ bei $x = 0$ und $x = 10$ cm,
- die gesamte im Muskelgewebe absorbierte Leistung pro Fläche!

4. Aufgabe

Eine ebene Welle läuft im Vakuum unter dem Einfallswinkel α_e auf eine unendlich große, ebene, perfekt elektrisch leitende Wand zu und wird reflektiert:



$$\underline{\hat{H}}_e = H_0 \cdot e^{-jk_e \vec{r}} \cdot \vec{e}_y \quad (H_0 > 0)$$

Bearbeiten Sie hierzu folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- Geben Sie die Formel für die gesamte, durch Superposition entstandene magnetische Feldstärke $\underline{\hat{H}}_{\text{ges}}$ als Funktion der kartesischen Koordinaten im Gebiet 1 an!
- Leiten Sie dazu die Formel für das gesamte elektrische Feld $\underline{\hat{E}}_{\text{ges}}$ als Funktion der kartesischen Koordinaten im Gebiet 1 ab!
- Berechnen Sie den zugehörigen komplexen Poynting-Vektor \vec{S} als Funktion der kartesischen Koordinaten im Gebiet 1!
- Bestimmen Sie die Orte, an denen jeweils die gesamte magnetische bzw. die elektrische Feldstärke im Gebiet 1 zu null werden!

Lösung zur 1. Aufgabe

a) Induzierte elektrische Feldstärke: $\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B}$

b) Skintiefe: $d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0 \mu_r}}$

c) $\kappa \gg \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$ bzw. $\omega \ll \kappa / \varepsilon_0 \varepsilon_r$

d) Phasengeschwindigkeit in verlustlosem Material: $v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$

e) Unter der Einfallsebene versteht man im Allgemeinen die Ebene, die beim Einfall einer ebenen Welle auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien sowohl die Flächennormale zur Grenzfläche als auch den Wellenzahlvektor enthält.

f) Fernfeldbedingung für elektrisch kleine Antennen: $r \gg \lambda$ oder $rk \gg 1$
(r = Abstand von der Antenne)

Lösung zur 2. Aufgabe

- a) Im Folgenden sei $\psi = \omega t$ der zeitabhängige Kreiswinkel zwischen Leiterschleife und positiver x-Achse. Ansatz über die zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses unter Beachtung des Vorzeichens von u_{ind} an den Klemmen (siehe auch Übung):

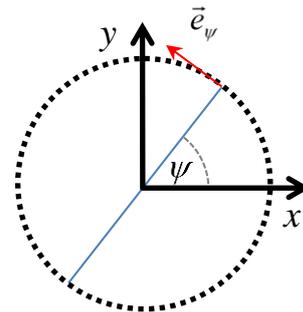
$$u_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B_0 \cdot \pi R^2 \cdot \cos(\psi)) = \underline{\underline{-\omega \cdot B_0 \cdot \pi R^2 \cdot \sin(\omega t)}}$$

- b) Für die Winkelgeschwindigkeit in Vektornotation gilt $\vec{\omega} = |\omega| \cdot \vec{e}_z$. Für die Geschwindigkeit eines Leiterschleifensegmentes auf einer Bahn mit Abstand r von der z-Achse gilt dann in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \cdot \vec{e}_\psi$$

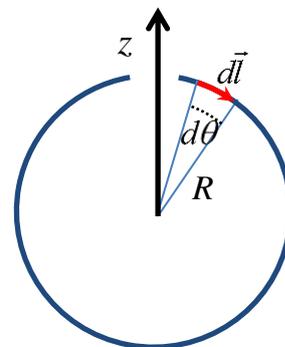
Mit $\vec{e}_\psi = -\sin\psi \cdot \vec{e}_x + \cos\psi \cdot \vec{e}_y$ folgt in kartesischen Koordinaten ($\psi = \omega t$):

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= \omega r \cdot \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\psi \cdot B_0 \end{pmatrix} \\ &= -\omega r \cdot \sin\psi \cdot B_0 \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$



Nun kann das Integral über die Leiterschleife ausgeführt werden. Auf Grund der Symmetrie der Anordnung genügt es, das Integral für einen Viertel des Kreisringes auszuwerten. Es empfiehlt sich, über den Winkel θ in Kugelkoordinaten zu integrieren, wobei $\vec{e}_z \cdot d\vec{l} = -\sin\theta \cdot R \cdot d\theta$ und $r = R \cdot \sin\theta$ zu beachten sind:

$$\begin{aligned} u_{\text{ind}}(t) &= \int_{\text{Ring}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} -\omega R^2 \cdot \sin\psi \cdot B_0 \cdot \sin^2\theta \, d\theta \\ &= -4 \cdot \omega R^2 \cdot \sin\psi \cdot B_0 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta \\ &= -4 \cdot \omega R^2 \cdot \sin\psi \cdot B_0 \cdot \underbrace{\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2}}_{=\pi/4} \\ &= \underline{\underline{-\omega \cdot B_0 \cdot \pi R^2 \cdot \sin\omega t}} \end{aligned}$$



Lösung zur 3. Aufgabe

- a) Die Beträge der komplexen Feldstärkeamplituden können mit Hilfe der Strahlungsdichte und des Wellenwiderstands im Vakuum ($\underline{\eta}_1 = \eta_0 \approx 376,73\Omega$) bestimmt werden:

$$S_m = \frac{1}{2\eta_0} \cdot \left| \hat{\underline{E}}_e \right|^2 \quad \rightarrow \quad \left| \hat{\underline{E}}_e \right| = \sqrt{2 \cdot \eta_0 \cdot S_m} = \underline{\underline{274,5 \text{ V/m}}}$$
$$S_m = \frac{\eta_0}{2} \cdot \left| \hat{\underline{H}}_e \right|^2 \quad \rightarrow \quad \left| \hat{\underline{H}}_e \right| = \sqrt{2 \cdot S_m / \eta_0} = \underline{\underline{0,7286 \text{ A/m}}}$$

Die Wellenzahl im Vakuum ist gegeben durch:

$$\left| \vec{k}_e \right| = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{1,0 \cdot 10^7 \text{ rad/s}}{2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \underline{\underline{3,336 \cdot 10^{-2} \text{ 1/m}}}$$

- b) Der Transmissionskoeffizient für das elektrische Feld für den senkrechten Einfall auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien ist laut Skript (Einfall von Medium 1 auf Medium 2):

$$t_E = \frac{2\underline{\eta}_2}{\underline{\eta}_2 + \underline{\eta}_1}$$

Hier gilt $\underline{\eta}_1 = \eta_0 \approx 376,73\Omega$ und:

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0\mu_r}{\kappa + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{1\text{S/m} + j\omega\varepsilon_0 \cdot 65}} = (2,514 + j \cdot 2,499)\Omega$$

Wegen $1\text{S/m} \gg j\omega\varepsilon_0 \cdot 65$ könnte man auch die Skineffektnäherung nutzen und rechnen:

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0\mu_r}{\kappa}} = (2,507 + j \cdot 2,507)\Omega$$

Mit diesem Wert ergibt sich $t_E = (1,331 + j \cdot 1,313) \cdot 10^{-2}$ bzw. $|t_E| = 1,869 \cdot 10^{-2}$.

Damit ergibt sich der Betrag der komplexen Amplitude des elektrischen Feldes bei $x = 0 \text{ cm}$:

$$\left| \hat{\underline{E}}_t(x = 0 \text{ cm}) \right| = \left| \hat{\underline{E}}_e \right| \cdot |t_E| = \underline{\underline{5,131 \text{ V/m}}}$$

und der Betrag der komplexen Amplitude des magnetischen Feldes an gleicher Stelle zu:

$$\left| \hat{\underline{H}}_t(x=0\text{ cm}) \right| = \left| \hat{\underline{E}}_t(x=0\text{ cm}) \right| / |\eta_2| = \underline{\underline{1,448\text{ A/m}}}$$

- c) Für die Berechnung der Werte in der Tiefe des Muskelgewebes bei $x = 10\text{ cm}$ benötigt man die Dämpfungskonstante α . Wegen $1\text{ S/m} \gg j\omega\epsilon_0 \cdot 65$ kann diese in der Skineffektnäherung berechnet werden ($d_s = \text{Skintiefe}$):

$$\alpha = \frac{1}{d_s} = \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu_0\mu_r}{2}} = 2,506\text{ 1/m}$$

Die Beträge der komplexen Feldstärkeamplituden bei $x = 10\text{ cm}$ sind dann:

$$\left| \hat{\underline{E}}_t(x=10\text{ cm}) \right| = \left| \hat{\underline{E}}_t(x=0\text{ cm}) \right| \cdot \exp(-\alpha \cdot 0,1\text{ m}) = \underline{\underline{3,994\text{ V/m}}}$$

$$\left| \hat{\underline{H}}_t(x=10\text{ cm}) \right| = \left| \hat{\underline{H}}_t(x=0\text{ cm}) \right| \cdot \exp(-\alpha \cdot 0,1\text{ m}) = \underline{\underline{1,127\text{ A/m}}}$$

- d) Der Betrag des komplexen Poynting-Vektors ist:

$$\left| \vec{\underline{S}} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \hat{\underline{E}} \times \hat{\underline{H}}^* \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \hat{\underline{E}} \right| \cdot \left| \hat{\underline{H}} \right|$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Werte folgt:

$$\left| \vec{\underline{S}}(x=0\text{ cm}) \right| = \underline{\underline{3,714\text{ W/m}^2}} \quad \text{und} \quad \left| \vec{\underline{S}}(x=10\text{ cm}) \right| = \underline{\underline{2,250\text{ W/m}^2}}$$

- e) Die dissipierte Leistungsdichte pro Volumen ist gegeben durch (κ rein reell):

$$p = \frac{1}{2} \cdot \hat{\underline{J}}^* \cdot \hat{\underline{E}} = \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \left| \hat{\underline{E}} \right|^2$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Werte folgt:

$$p(x=0\text{ cm}) = \underline{\underline{13,17\text{ W/m}^3}} \quad \text{und} \quad p(x=10\text{ cm}) = \underline{\underline{7,975\text{ W/m}^3}}$$

- f) Die gesamte absorbierte Leistung pro Fläche ist gegeben durch:

$$P_s = \int_0^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \left| \hat{E}(x=0\text{cm}) \right|^2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} dx}_{= \frac{1}{2\alpha} [e^{-2\alpha x}]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}} = \underline{\underline{2,626 \text{ W/m}^2}}$$

Alternativ kann man diesen Wert berechnen über den Ansatz:

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\kappa d_s} \cdot H_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\kappa} \cdot H_0^2$$

mit $H_0 = \left| \hat{H}_t(x=0\text{cm}) \right|$.

Anmerkung:

In Abhängigkeit der einfallenden mittleren Strahlungsdichte stellt sich das letzte Ergebnis genähert wie folgt dar ($\underline{\eta}_1 = \eta_0 \approx 376,73\Omega \gg |\underline{\eta}_1|$):

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\kappa d_s} \cdot \left(\frac{\left| \hat{E}_e \right| \cdot |t_E|}{|\underline{\eta}_2|} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\kappa d_s} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \eta_0 \cdot S_m} \cdot \frac{2}{|\underline{\eta}_2 + \eta_0|} \right)^2 \approx \frac{4}{\kappa d_s \eta_0} \cdot S_m$$

In dieser Näherung ergibt sich der Wert $P_s = 2,661 \text{ W/m}^2$.

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Aufgrund der Leitfähigkeit von $\kappa \rightarrow \infty$ ergibt sich ein Reflexionsfaktor für das magnetische Feld von (siehe Skript) $r_H = 1$ und somit gilt für den ortsunabhängigen Anteil der komplexen Amplitude der reflektierten magnetischen Feldstärke:

$$\underline{H}_{0r} = \underline{H}_{0e} = H_0$$

Mit dem Wellenzahlvektor der einfallenden Welle:

$$\vec{k}_e = k_e \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ \cos \alpha_e \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ \cos \alpha_e \end{pmatrix}$$

und dem der reflektierten Welle:

$$\vec{k}_r = k_e \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ -\cos \alpha_e \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \\ 0 \\ -\cos \alpha_e \end{pmatrix}$$

ergibt sich die gesamte magnetische Feldstärke durch die Superposition der einfallenden und der reflektierten Welle:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{H}}_{\text{ges}} &= H_0 \cdot \left(e^{-jk_e(x \sin \alpha_e + z \cos \alpha_e)} + e^{-jk_e(x \sin \alpha_e - z \cos \alpha_e)} \right) \cdot \vec{e}_y \\ &= H_0 \cdot \left(e^{-jk_e z \cos \alpha_e} + e^{+jk_e z \cos \alpha_e} \right) \cdot e^{-jk_e(x \sin \alpha_e)} \cdot \vec{e}_y \\ &= 2H_0 \cdot \cos(k_e z \cos \alpha_e) \cdot e^{-jk_e x \sin \alpha_e} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Das gesamte elektrische Feld berechnet sich ebenfalls aus der Superposition der einfallenden sowie der reflektierten Welle:

$$\hat{\underline{E}}_{\text{ges}} = \hat{\underline{E}}_e + \hat{\underline{E}}_r$$

Das elektrische Feld hat im Gegensatz zum magnetischen zwei Komponenten, eine x - und eine z -Komponente. Diese können aus der Zeichnung bzw. geometrisch bestimmt werden. Für den einfallenden Teil:

$$\hat{\underline{E}}_e = \eta_0 \cdot H_0 \cdot e^{-jk_e(x \sin \alpha_e + z \cos \alpha_e)} \cdot (\cos \alpha_e \cdot \vec{e}_x - \sin \alpha_e \cdot \vec{e}_z).$$

Für den reflektierten Teil unter Berücksichtigung des Reflexionsfaktors:

$$\underline{\hat{E}}_r = \eta_0 \cdot H_0 \cdot e^{-jk_e(x\sin\alpha_e - z\cos\alpha_e)} \cdot (-\cos\alpha_e \cdot \vec{e}_x - \sin\alpha_e \cdot \vec{e}_z)$$

Somit ergibt sich für das gesamte Feld:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{E}}_{\text{ges}} &= \eta_0 \cdot H_0 \cdot \left[e^{-jk_e(x\sin\alpha_e + z\cos\alpha_e)} \cdot (\cos\alpha_e \cdot \vec{e}_x - \sin\alpha_e \cdot \vec{e}_z) + \right. \\ &\quad \left. e^{-jk_e(x\sin\alpha_e - z\cos\alpha_e)} \cdot (-\cos\alpha_e \cdot \vec{e}_x - \sin\alpha_e \cdot \vec{e}_z) \right] \\ &= \eta_0 \cdot H_0 \cdot \left[\left(e^{-jk_e(x\sin\alpha_e + z\cos\alpha_e)} \cdot \cos\alpha_e - e^{-jk_e(x\sin\alpha_e - z\cos\alpha_e)} \cdot \cos\alpha_e \right) \cdot \vec{e}_x + \right. \\ &\quad \left. \left(-e^{-jk_e(x\sin\alpha_e + z\cos\alpha_e)} \cdot \sin\alpha_e - e^{-jk_e(x\sin\alpha_e - z\cos\alpha_e)} \cdot \sin\alpha_e \right) \cdot \vec{e}_z \right] \\ &= \eta_0 \cdot H_0 \cdot e^{-jk_e x \sin\alpha_e} \cdot \left[\left(e^{-jk_e z \cos\alpha_e} - e^{+jk_e z \cos\alpha_e} \right) \cdot \cos\alpha_e \cdot \vec{e}_x + \right. \\ &\quad \left. \left(-e^{-jk_e z \cos\alpha_e} - e^{+jk_e z \cos\alpha_e} \right) \cdot \sin\alpha_e \cdot \vec{e}_z \right] \\ &= \underline{\underline{-2\eta_0 \cdot H_0 \cdot e^{-jk_e x \sin\alpha_e} \cdot \begin{pmatrix} j \sin(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \cos\alpha_e \\ 0 \\ \cos(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \sin\alpha_e \end{pmatrix}}}} \end{aligned}$$

- c) Mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a) und b) berechnet sich der komplexe Poynting-Vektor zu

$$\begin{aligned} \underline{\vec{S}} &= \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{E}} \times \underline{\hat{H}}^* \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-2\eta_0 \cdot H_0 \cdot e^{-jk_e x \sin\alpha_e} \right) \cdot \left(2H_0 \cdot \cos(k_e z \cos\alpha_e) \cdot e^{-jk_e x \sin\alpha_e} \right)^* \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} j \sin(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \cos\alpha_e \\ 0 \\ \cos(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \sin\alpha_e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^* \\ &= \underline{\underline{2\eta_0 \cdot H_0^2 \cdot \cos(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \begin{pmatrix} \cos(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \sin\alpha_e \\ 0 \\ -j \sin(k_e z \cos\alpha_e) \cdot \cos\alpha_e \end{pmatrix}}}} \end{aligned}$$

- d) Nullstellen der magnetischen Feldstärke bei:

$$\cos(k_e z \cos\alpha_e) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{z = -n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k_e \cos\alpha_e} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots)}}$$

Zur Bestimmung der Nullstellen der elektrischen Feldstärke betrachten wir zunächst die Nullstellen der einzelnen Komponenten:

$$x: \sin(k_e z \cos \alpha_e) = 0 \quad \rightarrow \quad z = -n \cdot \pi \cdot \frac{1}{k_e \cos \alpha_e} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$z: \cos(k_e z \cos \alpha_e) = 0 \quad \rightarrow \quad z = -n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k_e \cos \alpha_e} \quad (n = 1, 3, 5, 7, \dots)$$

Daraus ergeben sich keine gemeinsamen Nullstellen. Allerdings müssen auch die Fälle des senkrechten ($\alpha_e = 0$) und streifenden ($\alpha_e = 90$) Einfalls berücksichtigt werden. Für den senkrechten Einfall ergibt sich, dass die z-Komponente immer null ist und somit verbleibt zu fordern:

$$x: \sin(k_e z \cdot 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{z = -n \cdot \pi \cdot \frac{1}{k_e} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)}}$$

Für den streifenden Einfall ergibt sich, dass die x-Komponente immer null ist und somit verbleibt zu fordern:

$$z: \cos(k_e z \cdot 0) = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{keine Lösung für } z)$$

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Dr. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	8	8	8	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 13. 8. 2015 – 9:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

- Hinweise:**
- 1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen.
Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!
- 2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“:** Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.
- Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.
- Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

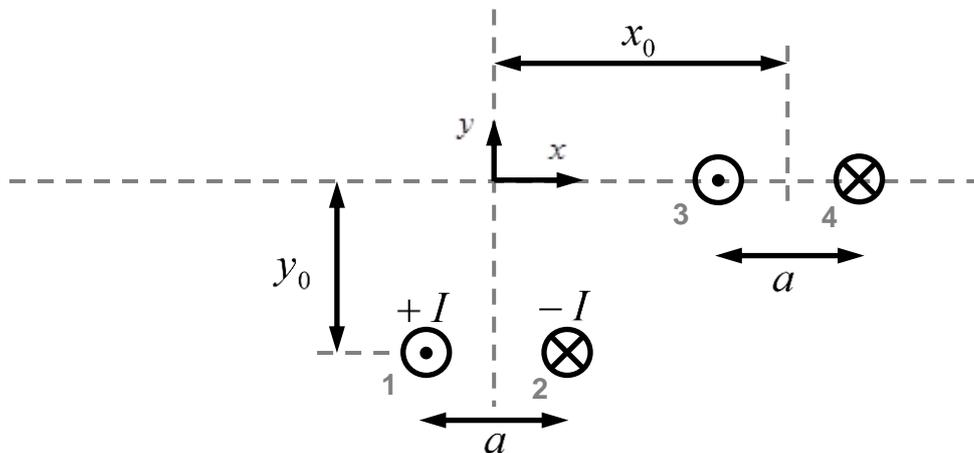
- a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in „differentieller“ Form für komplexe Feldamplituden?
- b) Wie verändert sich der Widerstand eines runden elektrischen Leiters mit der Frequenz bei Vorliegen eines stark ausgeprägten Skin-Effektes?
- c) Wie lautet die eindimensionale, homogene Wellen-Differentialgleichung (ohne Dämpfung) für eine skalare Größe $F(x,t)$ im Zeitbereich?
- d) Wie lautet ihre allgemeine Lösung nach d’Alembert (Formel)?
- e) Wie berechnet sich die Wellenzahl (Kreiswellenzahl) für ein verlustloses Medium aus seinen Eigenschaften (Formel)?
- f) Was versteht man unter der so genannten „retardierten Zeit“ (Formel für das Vakuum)?

Vor-und Zuname:

Matrikel-Nr.:

2. Aufgabe

Gegeben sei die folgende Anordnung von unendlich langen, parallel zur z-Achse verlaufenden Leitern. Das ortsfeste Leiterpaar A (1, 2) führt einen Strom $+I$ bzw. $-I$ wie in der Abbildung gezeigt. Das Leiterpaar B (3, 4) sei stromlos und beweglich. Der Versatz zwischen den Mittelachsen wird mit x_0 bzw. y_0 bezeichnet. Der Abstand a zwischen den Leitern eines Paares ist jeweils konstant. Die Leiter sind umgeben von einem isotropem Dielektrikum mit $\epsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$.



Bearbeiten Sie folgenden Aufgaben bzw. Fragen:

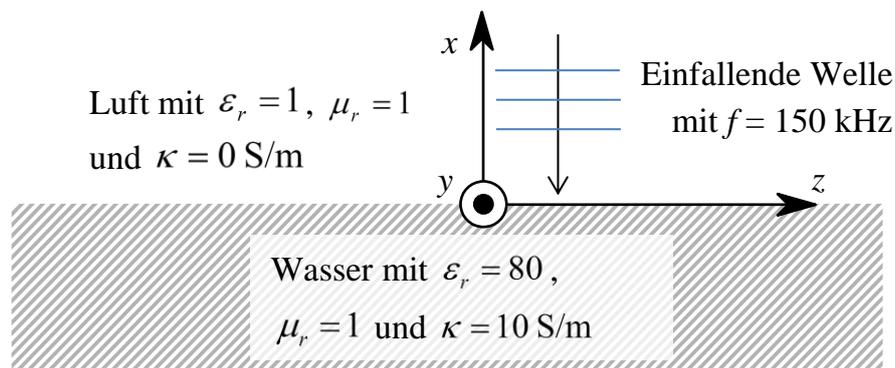
- Ermitteln Sie vorzeichenrichtig den magnetischen Fluss pro Länge $\phi'_{1B}(x_0, y_0)$ von Leiter (1) im Leiterpaar B (3, 4) in Abhängigkeit vom Versatz x_0, y_0 ! Das Vorzeichen ergibt sich hierbei aus der Definition der Stromrichtungen in B (siehe Skizze).
- Ermitteln Sie nun vorzeichenrichtig den durch das Leiterpaar A (1, 2) verursachten magnetischen Fluss pro Länge $\phi'_{AB}(x_0, y_0)$, der B (3, 4) durchsetzt!
- Berechnen Sie die Nullstellen von $\phi'_{AB}(x_0, y_0)$ für festes y_0 und variablen Versatz x_0 und erläutern Sie, wie man deren Existenz qualitativ begründen kann!
- Skizzieren Sie qualitativ $\phi'_{AB}(x_0, y_0)$ und $\phi'_{AB}(x_0, y_0/2)$ als Funktionsgraphen in Abhängigkeit des Versatzes $-\infty < x_0 < +\infty$! Kennzeichnen Sie hierbei insbesondere die Lage der Nullstellen deutlich erkennbar!

3. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle trifft aus der Luft kommend senkrecht auf eine glatte und ebene Wasseroberfläche und wird teilweise reflektiert und teilweise transmittiert. Die komplexe Amplitude des einfallenden elektrischen Feldes hat die folgende Form:

$$\hat{\underline{E}} = E_0 \cdot \exp(jkx) \cdot (\vec{e}_y + j \cdot \vec{e}_z) \quad \text{mit} \quad E_0 = 1 \text{ V/m}$$

und \vec{e}_y und \vec{e}_z als Einheitsvektoren in y- bzw. z-Richtung.



Bearbeiten Sie folgenden Aufgaben bzw. Fragen:

- Bestimmen Sie die Wellenzahl \underline{k} in Luft als Zahlenwert!
- Bestimmen Sie die Wellenimpedanz $\underline{\eta}_{\text{Wasser}}$ und die Wellenzahl $\underline{k}_{\text{Wasser}}$ in Wasser jeweils als Zahlenwerte in einer geeigneten Näherung!
- Bestimmen Sie die Transmissions- und Reflexionsfaktoren des elektrischen Feldes \underline{t}_E und \underline{r}_E als Zahlenwerte mit dieser Näherung!
- Geben Sie die Formel für die komplexe Amplitude des magnetischen Feldes der einfallenden Welle an! Welchen Zahlenwert hat der Vorfaktor derselben?
- Geben Sie die Formel für die komplexe Amplitude des reflektierten elektrischen Feldes an! Welchen Zahlenwert hat der Vorfaktor derselben?
- Geben Sie die Formel für die komplexe Amplitude des transmittierten elektrischen Feldes an! Welchen Zahlenwert hat der Vorfaktor derselben?

Hinweis: Für alle Zahlenwerte genügen vier signifikante Stellen, also z.B. $1,234 \cdot 10^5$, wobei die letzte Ziffer (hier die 4) gerundet sein soll. Geben Sie bei komplexen Größen jeweils Real- und Imaginärteil an!

4. Aufgabe

Das komplexe elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle mit Kreisfrequenz ω in einem isotropen Dielektrikum mit Permittivität ϵ_r und Permeabilität $\mu_r = 1$ sei gegeben als:

$$\vec{E} = \underline{E}_0 \cdot \exp(j(\omega t - k_z z)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ -\frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind a, b und k_z reelle Parameter mit Zahlenwerten größer null und \underline{E}_0 ist ein ortsunabhängiger Vorfaktor.

Bearbeiten Sie hierzu folgende Aufgaben bzw. Fragen:

- Berechnen Sie die elektrische Ladungsdichte zu diesem Feld!
- Zeigen Sie, dass folgende Relation zwischen Kreisfrequenz ω , und den Parametern a, b und k_z herrschen muss:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + k_z^2} !$$

- Berechnen Sie das zum gegebenen E-Feld korrespondierende H-Feld!

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichungen für komplexe Amplituden der Felder:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\underline{B}} &= 0 & \operatorname{rot} \hat{\underline{H}} &= \hat{\underline{J}} + j\omega \cdot \hat{\underline{D}} \\ \operatorname{div} \hat{\underline{D}} &= \hat{\rho} & \operatorname{rot} \hat{\underline{E}} &= -j\omega \cdot \hat{\underline{B}} \end{aligned}$$

- b) Proportional zur Wurzel aus der Frequenz ($\sim \sqrt{f}$)

c)
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

v = Ausbreitungsgeschwindigkeit (hier rein reell)

d)
$$F(x, t) = G(x - v \cdot t) + H(x + v \cdot t)$$

G und H sind hinreichend oft differenzierbare Funktionen (rechts- bzw. linkslaufende Wellen)

e)
$$k_W = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}$$

f)
$$t_{\text{ret}} = t - s/c_0$$

s = Abstand zwischen Quelle und Aufpunkt

Lösung zur 2. Aufgabe

Bei der Lösung dieser Aufgabe geht man sinnvollerweise von folgender Formel aus dem Skript für den Fluss pro Länge eines vom Strom I durchflossenen Leiters in einem benachbarten Leiterpaar aus (parallele Anordnung, Leiter unendlich lang):

$$\phi' = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

Hierbei ist s_1 der Abstand zu demjenigen Leiter des Leiterpaares, der die positive Stromrichtung gleich definiert – s_2 ist der Abstand zu demjenigen Leiter, der die positive Stromrichtung gegengerichtet definiert.

- a) Der vom Leiter (1) verursachte magnetische Fluss pro Länge $\phi'_{1B}(x_0, y_0)$ im Leiterpaar B (3,4) beträgt mit Verwendung obiger Formel:

$$\phi'_{1B}(x_0, y_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{y_0^2 + (x_0 + a)^2}}{\sqrt{y_0^2 + x_0^2}}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{y_0^2 + (x_0 + a)^2}{y_0^2 + x_0^2}\right)$$

- b) Der vom Leiterpaar A (1,2) verursachte magnetische Fluss pro Länge $\phi'_{AB}(x_0, y_0)$ im Leiterpaar B (3,4) ergibt sich aus vorzeichenrichtiger Superposition der Beiträge von Leiter (1) und (2):

$$\begin{aligned}\phi'_{AB}(x_0, y_0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left[\ln\left(\frac{y_0^2 + (x_0 + a)^2}{y_0^2 + x_0^2}\right) - \ln\left(\frac{y_0^2 + x_0^2}{y_0^2 + (x_0 - a)^2}\right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{(y_0^2 + (x_0 + a)^2) \cdot (y_0^2 + (x_0 - a)^2)}{(y_0^2 + x_0^2)^2}\right)\end{aligned}$$

Wie zu sehen ist dies eine in x_0 und y_0 symmetrische Funktion.

- c) Zur Bestimmung der Nullstellen von $\phi'_{AB}(x_0, y_0)$ für beliebige feste y_0 und variablen Versatz x_0 ist es hinreichend

$$\frac{(y_0^2 + (x_0 + a)^2) \cdot (y_0^2 + (x_0 - a)^2)}{(y_0^2 + x_0^2)^2} = 1$$

zu fordern. Nach Ausmultiplizieren folgt:

$$y_0^4 + \underbrace{y_0^2(x_0 + a)^2 + y_0^2(x_0 - a)^2}_{=2y_0^2x_0^2 + 2y_0^2a^2} + \underbrace{(x_0 + a)^2(x_0 - a)^2}_{=x_0^4 - 2x_0^2a^2 + a^4} = y_0^4 + 2y_0^2x_0^2 + x_0^4$$

Daraus nach Wegstreichen identischer Terme:

$$2y_0^2a^2 - 2x_0^2a^2 + a^4 = 0$$

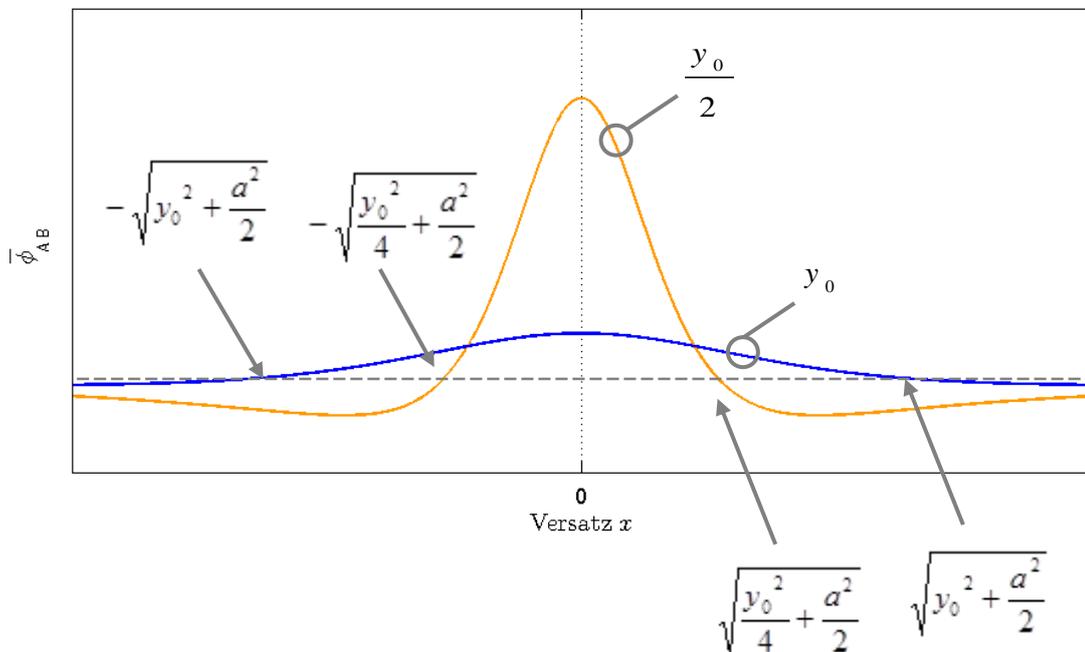
Dies ist eine quadratische Gleichung in x_0 mit den Lösungen:

$$\underline{\underline{x_0 = \pm \sqrt{y_0^2 + \frac{a^2}{2}}}}$$

Erläuterung:

Die Nullstellen sind symmetrisch zur senkrechten Mittelachse von Leiterpaar A angeordnet, wo der Fluss positiv ist. Weit entfernt von dieser Position ist der Fluss negativ, deshalb müssen diese Nullstellen existieren.

- d) Bei Halbierung des Versatzes in y -Richtung muss das Maximum größer werden. Gleichzeitig rücken die Nullstelle näher an die x -Achse heran:



Lösung zur 3. Aufgabe

Diese Aufgabe ist sinnvollerweise in der die Skin-Effekt-Näherung zu rechnen, denn im Wasser gilt:

$$\frac{\kappa_{\text{Wasser}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{Wasser}}} = 14,12 \text{ GHz} \gg 150 \text{ kHz}$$

Somit ist die Verschiebungsstromdichte deutlich kleiner als die Leitungsstromdichte, was für diese Näherung spricht.

a) Wellenzahl in der Luft:

$$\underline{k} = \beta = 2\pi f \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \underline{\underline{3,144 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}}}}$$

b) Wellenimpedanz im Wasser in Skin-Effekt-Näherung:

$$\underline{\eta}_{\text{Wasser}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\kappa_{\text{Wasser}}}} = \underline{\underline{(0,2433 + j \cdot 0,2433) \Omega}}$$

Wellenzahl in Wasser in Skin-Effekt-Näherung:

$$\underline{k}_{\text{Wasser}} = \sqrt{-j\omega\kappa_{\text{Wasser}}\mu_0} = \underline{\underline{(2,4335 - j \cdot 2,4335) \frac{1}{\text{m}}}}$$

c) Mit der Wellenimpedanz in der Luft von:

$$\eta_{\text{Luft}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,7 \Omega.$$

ergibt sich der Reflexionsfaktor für den senkrechten Einfall zu:

$$\underline{r}_E = \frac{\underline{\eta}_{\text{Wasser}} - \eta_{\text{Luft}}}{\underline{\eta}_{\text{Wasser}} + \eta_{\text{Luft}}} = \underline{\underline{-0,9987 + j \cdot 1,290 \cdot 10^{-3}}}$$

Der Transmissionsfaktor ergibt sich zu:

$$\underline{t}_E = 1 + \underline{r}_E = \underline{\underline{1,292 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,290 \cdot 10^{-3}}}$$

d) Für den Vorfaktor gilt:

$$\underline{H_0} = E_0 / \eta_{\text{Luft}} = \underline{\underline{2,655 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}}}$$

Die Richtung des Feldvektors dieser zirkular polarisierten Welle ergibt sich z.B. aus der Superposition der beiden linear polarisierten Teilwellen:

$$\vec{e}_{y,E} \rightarrow -\vec{e}_{z,H} \quad \vec{e}_{z,E} \rightarrow \vec{e}_{y,H}$$

Somit (β identisch zu oben):

$$\underline{\underline{\hat{H}}} = H_0 \cdot \exp(j\beta x) \cdot (-\vec{e}_z + j \cdot \vec{e}_y)$$

e) Für den Vorfaktor gilt:

$$\underline{\underline{E_{0r}}} = E_0 \cdot \underline{r_E} = (-0,9887 + j \cdot 1,290 \cdot 10^{-3}) \text{ V/m}$$

Die Ausbreitungsrichtung ist nun umgekehrt zur einfallenden Welle, also gilt (β identisch zu oben):

$$\underline{\underline{\hat{E}_r}} = \underline{E_{0r}} \cdot \exp(-j\beta x) \cdot (\vec{e}_y + j \cdot \vec{e}_z)$$

Anmerkung:

Die reflektierte Welle ist wie die einfallende zirkular polarisiert, die Rotationsrichtung ist allerdings umgekehrt zur einfallenden Welle.

f) Für den Vorfaktor gilt:

$$\underline{\underline{E_{0t}}} = E_0 \cdot \underline{t_E} = (1,292 \cdot 10^{-3} + j \cdot 1,290 \cdot 10^{-3}) \text{ V/m}$$

Das transmittierte elektrische Feld lautet damit ($\underline{k}_{\text{Wasser}}$ siehe oben):

$$\underline{\underline{\hat{E}_t}} = \underline{E_{0t}} \cdot \exp(jk_{\text{Wasser}} x) \cdot (\vec{e}_y + j \cdot \vec{e}_z)$$

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Berechnung der Ladungsdichte über $\operatorname{div} \vec{D} = \underline{\rho}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ &= \varepsilon_r \underbrace{\left[-\frac{\pi^2}{ab} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{\pi^2}{ab} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right]}_{=0} \cdot \exp(j(\omega t - kz))\end{aligned}$$

Die Ladungsdichte ist also überall im Raum null.

- b) Die Welle muss die Wellengleichung $\Delta \vec{E} + k^2 \cdot \vec{E} = 0$ mit:

$$k = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

lösen. Aus dieser Bedingung lässt sich die angegebene Dispersionsrelation ableiten, bzw. diese muss für alle drei Komponenten des Feldes gelten.

x-Komponente:

$$\Delta \underline{E}_x = \left[-\frac{\pi^2}{a^2} \right] \cdot \underline{E}_x + \left[-\frac{\pi^2}{b^2} \right] \cdot \underline{E}_x + \left[-k_z^2 \right] \cdot \underline{E}_x = \left[-\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{b^2} - k_z^2 \right] \cdot \underline{E}_x$$

Daraus folgt:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + k_z^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \cdot \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + k_z^2}$$

y-Komponente:

$$\Delta \underline{E}_y = \left[-\frac{\pi^2}{a^2} \right] \cdot \underline{E}_y + \left[-\frac{\pi^2}{b^2} \right] \cdot \underline{E}_y + \left[-k_z^2 \right] \cdot \underline{E}_y = \left[-\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{b^2} - k_z^2 \right] \cdot \underline{E}_y$$

und daraus dann dieselbe Schlussfolgerung wie für die x-Komponente.

z-Komponente:

$$\Delta \underline{E}_z = 0 = -k \cdot \underline{E}_z = 0$$

was immer erfüllt ist.

- c) Das zum elektrischen Feld korrespondierende magnetischen Feld kann wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{j}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \text{rot } \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \begin{pmatrix} \partial \underline{E}_z / \partial y - \partial \underline{E}_y / \partial z \\ \partial \underline{E}_x / \partial z - \partial \underline{E}_z / \partial x \\ \partial \underline{E}_y / \partial x - \partial \underline{E}_x / \partial y \end{pmatrix} \\
 &= \frac{j}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \begin{pmatrix} 0 - (-jk_z) \cdot \underline{E}_y \\ (-jk_z) \cdot \underline{E}_x - 0 \\ \left(-\frac{\pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{\pi^2}{b^2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right) \cdot \underline{E}_0 \cdot \exp(j(\omega t - k_z z)) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{j \cdot \underline{E}_0 \cdot \exp(j(\omega t - k_z z))}{\omega\mu_0\mu_r} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{j\pi k_z}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ -\frac{j\pi k_z}{b} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ -\left[\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

TU Hamburg-Harburg Theoretische Elektrotechnik Prof. Christian Schuster	Aufgabe	1	2	3	4	Σ
	Punkte maximal	6	6	9	9	30
	Punkte erreicht					
Vor- und Zuname:					Note:	
Matrikel-Nr.:						
Schriftliche Prüfung Theoretische Elektrotechnik II 17. 3. 2016 – 9:00 Uhr – Bearbeitungszeit: 120 Minuten						

- Hinweise:**
- 1. Aufgabe = „Wissensteil“:** Bearbeitung ohne jegliche schriftliche oder elektronische Hilfsmittel. Stichwortartige Antworten oder Formeln genügen.
Abgabe auf Extrablatt nach 10 Minuten!
- 2. – 4. Aufgabe = „Rechenteil“:** Bearbeitung mit schriftlichen Hilfsmitteln und einfachem Taschenrechner erlaubt. Abgabe nach weiteren 110 Minuten.
- Alle anderen Hilfsmittel sind untersagt, insbesondere müssen Handys und Laptops ausgeschaltet und verstaut sein.
- Bitte schreiben Sie **auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!**

1. Aufgabe

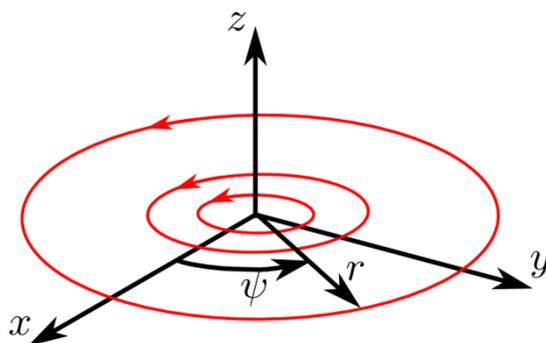
Bearbeiten Sie folgende Fragen bzw. Aufgaben:

- a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in differentieller Form für die komplexen Amplituden zeitlich harmonischer Felder?
- b) Wie verändert sich der Widerstand eines runden elektrischen Leiters mit der Frequenz bei Vorliegen eines stark ausgeprägten Skin-Effektes?
- c) Wie verändert sich die innere Induktivität eines runden elektrischen Leiters mit der Frequenz bei Vorliegen eines stark ausgeprägten Skin-Effektes?
- d) Wie lautet die Formel für den komplexen Poynting-Vektor und welche Einheit hat dieser?
- e) Erläutern Sie in kurzen Worten, was die Fresnelschen Gleichungen aussagen!
- f) Erläutern Sie in kurzen Worten, was man unter einer inhomogenen ebenen Welle versteht!

Vor - und Zuname	Matrikel - Nr.
------------------	----------------

2. Aufgabe

Gegeben ist folgende magnetische Flussdichte im Raum, die durch eine stationäre Stromdichteverteilung hervorgerufen wird:



$$\vec{B} = B_0 \cdot \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \cdot \vec{e}_\psi$$

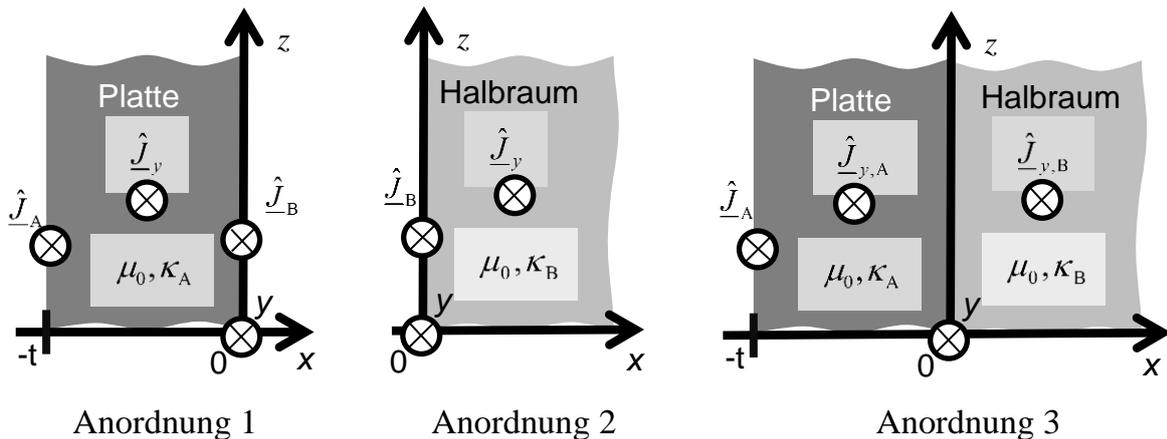
$$(B_0 > 0, r_0 > 0, \mu_r = 1)$$

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben bzw. beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welche Stromdichteverteilung \vec{J} hat \vec{B} hervorgerufen?
- Berechnen Sie den gesamten, in positive z-Richtung fließenden sowie den gesamten, in negative z-Richtung fließenden Strom!
- Berechnen Sie die zugehörige innere Induktivität pro Länge ℓ in z-Richtung für den Bereich $r=0$ bis $r=r_0$!

3. Aufgabe

Im Folgenden sollen Wechselstromdichten der Kreisfrequenz ω parallel zur y -Achse in verschiedenen Anordnungen von leitfähigen Platten bzw. Halbräumen mit ebener Grenzfläche untersucht werden. Im umgebenden Raum wird Vakuum angenommen. Platte bzw. Halbraum sind durch μ_0 und eine jeweilige spezifische Leitfähigkeit κ gekennzeichnet und erstrecken sich in z - bzw. y -Richtung bis ins Unendliche:

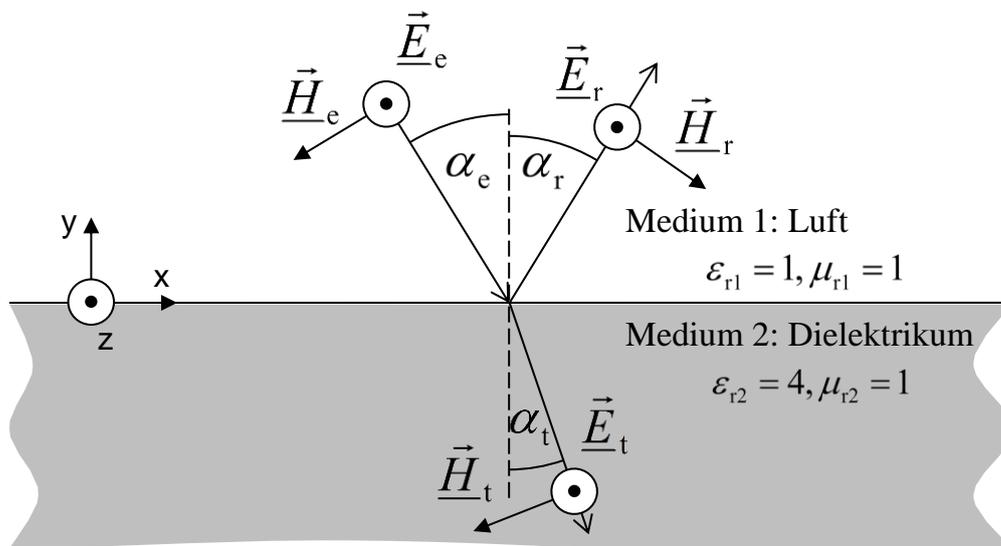


Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben bzw. beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Wie lautet allgemein die Differentialgleichung zur Bestimmung der komplexen Amplitude \hat{J}_y der Stromdichte als Funktion von x im Leiterinneren?
- Anordnung 1: Platte der Dicke t in x -Richtung (von $-t$ bis 0) mit an den Oberflächen fest vorgegebenen Stromdichten \hat{J}_A und \hat{J}_B (siehe Skizze). Bestimmen Sie hierzu $\hat{J}_y(x)$ in der Platte!
- Anordnung 2: Ebener Halbraum mit unendlicher Ausdehnung in positiver x -Richtung mit an der Oberfläche fest vorgegebener Stromdichte \hat{J}_B (siehe Skizze). Bestimmen Sie hierzu $\hat{J}_y(x)$ im Halbraum!
- Anordnung 3: Platte (Bereich A) und Halbraum (Bereich B) schließen nun nahtlos aneinander an und bilden damit einen geschichteten, stromdurchflossenen Leiter. Welche Stetigkeitsbedingungen bzw. Sprungbedingungen müssen an der Grenzfläche zwischen Platte und Halbraum erfüllt sein? Bestimmen Sie daraus $\hat{J}_y(x)$ jeweils in den Bereichen A und B in Abhängigkeit des vorgegebenen \hat{J}_A !

4. Aufgabe

Eine ebene elektromagnetische Welle mit der elektrischen Feldstärkenamplitude $E_0 = 100 \text{ V/m}$ und der Frequenz 60 GHz fällt in einem Winkel von $\alpha_e = 30^\circ$ zum Lot auf eine Grenzschicht von Luft zu einem verlustlosen Dielektrikum und wird dort reflektiert bzw. transmittiert:



Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben bzw. beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Bestimmen Sie den Winkel α_r der reflektieren und den Winkel α_t der transmittierten Welle in Zahlenwerten!
- Bestimmen Sie die Wellenzahlvektoren \vec{k}_e für die einfallende Welle, \vec{k}_r für die reflektierte Welle und \vec{k}_t für die transmittierte Welle in Zahlenwerten!
- Berechnen Sie den Reflexionsfaktor und Transmissionsfaktor des elektrischen Feldes als Zahlenwerte!
- Berechnen Sie die z-Komponente der gesamten elektrischen Feldstärke in Medium 1 als Funktion und zerlegen Sie diese gemäß folgender Form:

$$\underline{A} \cdot e^{-jk_e \cdot \sin \alpha_e \cdot x} \cdot \left(\underline{B} \cdot \cos(k_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y) + \underline{C} \cdot e^{-jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} \right)$$

- Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor der einfallenden und der transmittierten Welle in Zahlenwerten!

Lösung zur 1. Aufgabe

- a) Maxwell-Gleichungen in differentieller Form für komplexe Amplituden:

$$\operatorname{div} \underline{\hat{D}} = \underline{\hat{\rho}} \quad \operatorname{rot} \underline{\hat{E}} = -j\omega \cdot \underline{\hat{B}} \quad \operatorname{div} \underline{\hat{B}} = 0 \quad \operatorname{rot} \underline{\hat{H}} = \underline{\hat{J}} + j\omega \cdot \underline{\hat{D}}$$

- b) Proportional zur Wurzel aus der Frequenz ($\sim \sqrt{f}$)

- c) Umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Frequenz ($\sim 1/\sqrt{f}$)

- d) Komplexer Poynting-Vektor: $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad [\text{W/m}^2]$

- e) Die Fresnelschen Gleichungen machen Aussagen über Feldverhältnisse beim Einfall einer ebenen Welle auf eine unendlich große, ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien unterschiedlicher Wellenimpedanz in Abhängigkeit des Einfallswinkels, des Ausfallswinkels und der Polarisation. Sie geben dabei die Verhältnisse zwischen den ortsunabhängigen Anteilen der komplexen Feldstärkeamplituden von reflektierter zu einfallender Welle (Transmissionsfaktor) bzw. transmittierter zu einfallender ebener Welle (Reflexionsfaktor) wieder.

- f) Eine inhomogene ebene Welle ist eine ebene Welle, bei der Amplituden- und Phasenfronten im Raum nicht identisch liegen.

Lösung zur 2. Aufgabe

Die Aufgabe wird im Folgenden unter Benützung von Zylinderkoordinaten gelöst

- a) Die Stromdichteverteilung folgt aus dem Ampèreschen Gesetz:

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

Hierbei gilt für Zylinderkoordinaten (siehe z.B. Skript):

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{e}_r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial \psi} - \frac{\partial B_\psi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\psi \cdot \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\psi) - \frac{\partial B_r}{\partial \psi} \right)$$

Konkret im vorliegenden Fall also:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{B} = \vec{e}_z \cdot \frac{1}{\mu_0 r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\psi) \right) = \vec{e}_z \cdot \frac{B_0}{\mu_0 r} \cdot \left(\exp(-r/r_0) - \frac{r}{r_0} \cdot \exp(-r/r_0) \right) \\ &= \vec{e}_z \cdot \frac{B_0}{\mu_0 r} \cdot \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \cdot \exp(-r/r_0) = \underline{\underline{\frac{B_0}{\mu_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \exp(-r/r_0) \cdot \vec{e}_z}} \end{aligned}$$

Die Stromdichte wechselt also bei $r = r_0$ das Vorzeichen.

- b) Der gesamte, in positive z-Richtung fließende Strom ergibt sich aus der Integration über die Stromdichte von $r = 0$ bis $r = r_0$:

$$\begin{aligned} I_{+z} &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \vec{J} \cdot \vec{e}_z \cdot r \, dr \, d\psi = 2\pi \cdot \int_0^{r_0} J_z \cdot r \, dr = 2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \cdot \exp(-r/r_0) \, dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \left(\int_0^{r_0} \exp(-r/r_0) \, dr - \frac{1}{r_0} \cdot \int_0^{r_0} r \cdot \exp(-r/r_0) \, dr \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \left(\left[-r_0 \cdot \exp(-r/r_0) \right]_0^{r_0} - \frac{1}{r_0} \cdot \left[r_0^2 \cdot \exp(-r/r_0) \cdot \left(-\frac{r}{r_0} - 1 \right) \right]_0^{r_0} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \left(\left[-\frac{r_0}{e} - (-r_0) \right] - \frac{1}{r_0} \cdot \left[-2 \cdot \frac{r_0^2}{e} - (-r_0^2) \right] \right) = \underline{\underline{2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \frac{r_0}{e}}} \end{aligned}$$

Hierbei wurde Gebrauch gemacht von:

$$\int x \cdot \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a^2} \cdot (ax - 1) \quad (*)$$

Der gesamte, in negative z-Richtung fließende Strom ergibt sich aus der Integration über die Stromdichte von $r = r_0$ bis $r = \infty$:

$$\begin{aligned} I_{-z} &= 2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \left(\left[-r_0 \cdot \exp(-r/r_0) \right]_{r_0}^{\infty} - \frac{1}{r_0} \cdot \left[r_0^2 \cdot \exp(-r/r_0) \cdot \left(-\frac{r}{r_0} - 1 \right) \right]_{r_0}^{\infty} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \left(\left[0 - \left(-\frac{r_0}{e} \right) \right] - \frac{1}{r_0} \cdot \left[0 - \left(-2 \cdot \frac{r_0^2}{e} \right) \right] \right) = \underline{\underline{-2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \frac{r_0}{e}}} \end{aligned}$$

Damit ist der gesamte in z-Richtung fließende Strom null.

- c) Die interne Induktivität pro Länge ℓ in z-Richtung für den Bereich $r = 0$ bis $r = r_0$ lässt sich am einfachsten über die magnetische Energie berechnen:

$$\frac{W_m}{\ell} = \frac{1}{2} \cdot L' \cdot I_{+z}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot r dr d\psi dz = \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot \pi \cdot \int_0^{r_0} \exp(-2r/r_0) \cdot r dr$$

Das bestimmte Integral ergibt unter Ausnutzung der Integrationsregel (*):

$$\int_0^{r_0} \exp(-2r/r_0) \cdot r dr = \left[\frac{r_0^2}{4} \cdot \exp(-2r/r_0) \cdot \left(-\frac{2r}{r_0} - 1 \right) \right]_0^{r_0} = \left[-\frac{3r_0^2}{4e^2} - \left(-\frac{r_0^2}{4} \right) \right] = \frac{r_0^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{e^2} \right)$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses aus Teilaufgabe b für den Strom in positiver z-Richtung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot L' \cdot \left(2\pi \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \cdot \frac{r_0}{e} \right)^2 &= \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot \pi \cdot \frac{r_0^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) \\ \Rightarrow \underline{\underline{L' &= \frac{1}{8} \cdot \frac{(e^2 - 3)}{\pi} \cdot \mu_0}} \end{aligned}$$

Lösung zur 3. Aufgabe

Diese Aufgabe ist effektiv eindimensional und durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Rand- und Sprungbedingungen lösen.

- a) Die allgemeine Differentialgleichung für den Strom im Leiterinneren lautet (siehe z.B. Skript):

$$\Delta \hat{\underline{J}} = \frac{2j}{d_s^2} \cdot \hat{\underline{J}} \quad \text{mit} \quad d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0}} \quad \text{als Skintiefe.}$$

Mit den hier gegebenen Komponenten und Ortsabhängigkeiten ergibt sich für $\hat{\underline{J}}_y(x)$:

$$\frac{\partial^2 \hat{\underline{J}}_y}{\partial x^2} = \frac{2j}{d_s^2} \cdot \hat{\underline{J}}_y$$

- b) Die allgemeine Lösung für die Platte lautet (siehe z.B. Skript):

$$\hat{\underline{J}}_y(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot x / d_{SA}} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot x / d_{SA}} \quad \text{mit} \quad d_{SA} = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa_A \mu_0}}$$

Als Randbedingungen sind die Ströme an beiden Oberflächen vorgegeben. Damit werden die unbekannt Parameter bestimmt:

$$\hat{\underline{J}}_y(0) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \hat{\underline{J}}_B \quad \Rightarrow \quad \underline{A}_2 = \hat{\underline{J}}_B - \underline{A}_1 \quad (*)$$

$$\hat{\underline{J}}_y(-t) = \underline{A}_1 \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot (-t) / d_{SA}} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot (-t) / d_{SA}} = \hat{\underline{J}}_A \quad (**)$$

Einsetzen von (*) in (**) ergibt:

$$\underline{A}_1 \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} + (\hat{\underline{J}}_B - \underline{A}_1) \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} = \hat{\underline{J}}_A \quad \Rightarrow \quad \underline{A}_1 = \frac{\hat{\underline{J}}_A - \hat{\underline{J}}_B \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}}}{e^{-\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} - e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}}}$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in (*) ergibt:

$$\underline{A}_2 = \hat{\underline{J}}_B - \frac{\hat{\underline{J}}_A - \hat{\underline{J}}_B \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}}}{e^{-\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} - e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}}} = \frac{\hat{\underline{J}}_B \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} - \hat{\underline{J}}_A}{e^{-\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} - e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}}}$$

Damit ist die Lösung für die Platte vollständig bestimmt.

c) Die allgemeine Lösung für den ebenen Halbraum lautet (siehe z.B. Skript):

$$\underline{\hat{J}}_y(x) = \underline{A}_3 \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot x / d_{SB}} \quad \text{mit} \quad d_{SB} = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa_B \mu_0}}$$

Anpassung an die vorgegebene Randbedingung liefert direkt \underline{A}_3 :

$$\hat{J}_y(0) = \underline{A}_3 = \underline{\hat{J}}_B$$

d) An der Grenzfläche zwischen Platte (Bereich A) und Halbraum (Bereich B) liegen nur tangentielle Komponenten für elektrisches, magnetisches und Strömungsfeld vor. Da keine rein zweidimensionalen Oberflächenladungen oder -ströme vorhanden sind muss gelten:

$$\underline{\hat{E}}_{y,A}(0) = \underline{\hat{E}}_{y,B}(0) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\hat{J}_{y,A}(0)}{\kappa_A} = \frac{\hat{J}_{y,B}(0)}{\kappa_B} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{H}}_{z,A}(0) = \underline{\hat{H}}_{z,B}(0)$$

Mit diesen Stetigkeitsbedingungen bzw. Sprungbedingungen müssen die beiden allgemeinen Lösungen für Platte und Halbraum (siehe vorherige Teilaufgaben):

$$\underline{\hat{J}}_{y,A}(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot x / d_{SA}} + \underline{A}_2 \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot x / d_{SA}} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{J}}_{y,B}(x) = \underline{A}_3 \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot x / d_{SB}}$$

$(-t \leq x \leq 0)$ $(0 < x < \infty)$

aufeinander abgestimmt werden, d.h. alle unbekannt Parameter müssen bestimmt werden. Aus der ersten Bedingung folgt:

$$\frac{1}{\kappa_A} (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) = \frac{1}{\kappa_B} \cdot \underline{A}_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{A}_3 = \frac{\kappa_B}{\kappa_A} \cdot (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \quad (***)$$

Für die Anwendung der zweiten Bedingung müssen zunächst die magnetischen Feldstärken bestimmt werden. Aus $\text{rot} \underline{\hat{E}} = -j\omega\mu_0 \cdot \underline{\hat{H}}$ folgt hier (alle anderen Ableitungen sind null):

$$\hat{H}_z = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} = -\frac{1}{j\omega\kappa\mu_0} \cdot \frac{\partial \hat{J}_y}{\partial x}$$

Also:

$$\underline{\hat{H}}_{z,A}(x) = -\frac{1}{j\omega\kappa_A\mu_0} \cdot \left(\underline{A}_1 \cdot \frac{\sqrt{2j}}{d_{SA}} \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot x / d_{SA}} - \underline{A}_2 \cdot \frac{\sqrt{2j}}{d_{SA}} \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot x / d_{SA}} \right)$$

$$\hat{H}_{z,B}(x) = -\frac{1}{j\omega\kappa_B\mu_0} \cdot \left(-\underline{A}_3 \cdot \frac{\sqrt{2j}}{d_{SB}} \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot x / d_{SB}} \right)$$

Wegen $\frac{1}{\omega\kappa\mu_0} \cdot \frac{1}{d_S} = \frac{1}{\omega\kappa\mu_0} \cdot \sqrt{\frac{\omega\kappa\mu_0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2\omega\kappa\mu_0}}$ folgt aus der zweiten Bedingung:

$$\sqrt{\frac{1}{\kappa_A}} \cdot (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) = -\sqrt{\frac{1}{\kappa_B}} \cdot \underline{A}_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{A}_3 = \sqrt{\frac{\kappa_B}{\kappa_A}} \cdot (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) \quad (***)$$

Einsetzen von (***) in (***) ergibt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\kappa_B}{\kappa_A}} \cdot (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) &= \frac{\kappa_B}{\kappa_A} \cdot (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\kappa_A} (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) = \sqrt{\kappa_B} \cdot (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \\ &\Rightarrow \quad \underline{A}_1 = \underline{A}_2 \cdot \frac{\sqrt{\kappa_A} - \sqrt{\kappa_B}}{\sqrt{\kappa_A} + \sqrt{\kappa_B}} \end{aligned}$$

Schließlich muss damit noch die Anpassung an die vorgegebene Stromdichte bei $x = -t$ vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{y,A}(-t) &= \underline{A}_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\kappa_A} - \sqrt{\kappa_B}}{\sqrt{\kappa_A} + \sqrt{\kappa_B}} \cdot e^{\sqrt{2j} \cdot (-t) / d_{SA}} + e^{-\sqrt{2j} \cdot (-t) / d_{SA}} \right) = \hat{J}_A \\ \Rightarrow \quad \underline{A}_2 &= \frac{\hat{J}_A}{\frac{\sqrt{\kappa_A} - \sqrt{\kappa_B}}{\sqrt{\kappa_A} + \sqrt{\kappa_B}} \cdot e^{-\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}} + e^{\sqrt{2j} \cdot t / d_{SA}}} \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung den geschichteten Leiter vollständig bestimmt.

Anmerkung:

Für $\kappa_B = \kappa_A$ wird $\underline{A}_1 = 0$ und $\underline{A}_3 = \underline{A}_1$, was zur Lösung für einen homogenen Halbraum führt.

Lösung zur 4. Aufgabe

- a) Der Winkel der reflektierten Welle ist gleich dem der einfallenden:

$$\underline{\underline{\alpha_r = 30^\circ}}$$

Der Winkel der transmittierten Welle folgt aus dem Brechungsgesetz in folgender Form (die rel. Permeabilitäten sind identisch):

$$\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \underbrace{\sin(30^\circ)}_{=1/2} = \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \sin(\alpha_t) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_t = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = 14,478^\circ}}$$

- b) Der Betrag des Wellenzahlvektors hängt von den Materialwerten und der Frequenz über $k = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}$ ab. Somit:

$$k_e = k_r = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2\pi \cdot 60 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{s} \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1257,5 \text{ m}^{-1}$$

$$k_t = \sqrt{4} \cdot k_e = 2515,0 \text{ m}^{-1}$$

Die Richtungen bestimmen sich anhand der bereits berechneten Winkel. Es folgt:

$$\underline{\underline{\vec{k}_e = \begin{pmatrix} \sin(30^\circ) \\ -\cos(30^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot k_e = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot k_e = \begin{pmatrix} 628,75 \\ -1089,0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}^{-1}}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{k}_r = \begin{pmatrix} \sin(30^\circ) \\ \cos(30^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot k_r = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot k_r = \begin{pmatrix} 628,75 \\ 1089,0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}^{-1}}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{k}_t = \begin{pmatrix} \sin(14,478^\circ) \\ -\cos(14,478^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot k_t = \begin{pmatrix} 0,250 \\ -0,9682 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot k_t = \begin{pmatrix} 628,75 \\ -2435,0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}^{-1}}}}$$

- c) Für den gegebenen Polarisationsfall ergeben sich der Reflexions- und Transmissionsfaktor des elektrischen Feldes aus den Fresnelschen Formeln zu:

$$\begin{aligned} \underline{r}_E &= \frac{\Gamma_2 \cdot \cos(\alpha_e) - \Gamma_1 \cdot \cos(\alpha_i)}{\Gamma_2 \cdot \cos(\alpha_e) + \Gamma_1 \cdot \cos(\alpha_i)} = \frac{(\Gamma_2 / \Gamma_1) \cdot \cos(30^\circ) - \cos(14,478^\circ)}{\underbrace{(\Gamma_2 / \Gamma_1)}_{=\sqrt{\epsilon_{r1}/\epsilon_{r2}}=1/4} \cdot \cos(30^\circ) + \cos(14,478^\circ)} \\ &= \frac{\sqrt{3}/4 - 0,9682}{\sqrt{3}/4 + 0,9682} = \underline{\underline{-0,3898}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{t_E = 1 + r_E = 0,6102}}$$

- d) Das gesamte elektrische Feld in Medium 1 ergibt sich aus der Summe des einfallenden und des reflektierten Feldes:

$$\vec{E}_1(x, y) = \vec{E}_e(x, y) + \vec{E}_r(x, y) = \hat{E}_{1z}(x, y) \cdot e^{j\alpha x} \cdot \vec{e}_z$$

Die z-Komponente der komplexen Amplitude ist hier

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1z}(x, y) &= E_0 \cdot e^{-jk_e \cdot \vec{r}} + E_0 \cdot \underline{r}_E \cdot e^{-jk_r \cdot \vec{r}} \\ &= E_0 \cdot e^{-jk_e \cdot (\sin \alpha_e \cdot x - \cos \alpha_e \cdot y)} + E_0 \cdot \underline{r}_E \cdot e^{-jk_e \cdot (\sin \alpha_e \cdot x + \cos \alpha_e \cdot y)} \\ &= E_0 \cdot e^{-jk_e \cdot \sin \alpha_e \cdot x} \cdot \left(e^{jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} + \underline{r}_E \cdot e^{-jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} \right) \\ &= E_0 \cdot e^{-jk_e \cdot \sin \alpha_e \cdot x} \cdot \left(e^{jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} + e^{-jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} + (\underline{r}_E - 1) \cdot e^{-jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} \right) \\ &= \underline{\underline{E_0 \cdot e^{-jk_e \cdot \sin \alpha_e \cdot x} \cdot \left(2 \cdot \cos(k_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y) + (\underline{r}_E - 1) \cdot e^{-jk_e \cdot \cos \alpha_e \cdot y} \right)}} \end{aligned}$$

Diese Form entspricht der geforderten mit:

$$\underline{A} = E_0, \quad \underline{B} = 2, \quad \underline{C} = \underline{r}_E - 1$$

Zu erkennen ist daran, dass es einen in y-Richtung stehenden Wellenanteil gibt.

- e) Der komplexe Poynting-Vektor der einfallenden Welle ist ($\Gamma_0 = 376,7 \Omega$):

$$\vec{S}_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\hat{E}_e|^2}{\Gamma_2} \cdot \frac{\vec{k}_e}{|k_e|} = \frac{|E_0|^2}{2\Gamma_0 / \sqrt{\epsilon_{r1}}} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 13,27 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6,636 \\ -11,49 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$

Der komplexe Poynting-Vektor der transmittierten Welle ist ($t_E = 0,6102$):

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\hat{E}_t|^2}{\Gamma_2} \cdot \frac{\vec{k}_t}{|k_t|} = \frac{|t_E \cdot E_0|^2}{2\Gamma_0 / \sqrt{\epsilon_{r2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0,250 \\ -0,9682 \\ 0 \end{pmatrix} = 9,884 \cdot \begin{pmatrix} 0,250 \\ -0,9682 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2,471 \\ -9,569 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}$$